

GEOMETRÍA PLANA

PARA INGENIERÍA

Ejercicios resueltos

Víctor Hugo Vásconez Velasco
Daniela Carina Vásconez Núñez
Vanessa Alexandra Vásconez Núñez
Fernando Mauricio Tello Oquendo

CIDE
EDITORIAL



GEOMETRÍA

PLANA

PARA LA INGENIERÍA
Ejercicios resueltos

GEOMETRÍA PLANA

PARA LA INGENIERÍA
Ejercicios resueltos



AUTORES

Víctor Hugo Vásconez Velasco
Daniela Carina Vásconez Núñez
Vanessa Alexandra Vásconez Núñez
Fernando Mauricio Tello Oquendo

Reservados todos los derechos. Está prohibido, bajo las sanciones penales y el resarcimiento civil previstos en las leyes, reproducir, registrar o transmitir esta publicación, íntegra o parcialmente, por cualquier sistema de recuperación y por cualquier medio, sea mecánico, electrónico, magnético, electroóptico, por fotocopia o por cualquiera otro, sin la autorización previa por escrito al Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador (CIDE).

Copyright © 2023
Centro de Investigación y Desarrollo Ecuador
Tel.: + (593) 04 2037524
<http://www.cidecuador.org>

ISBN: 978-9942-616-32-6

<https://doi.org/10.33996/cide.ecuador.GP2616326>

Dirección editorial: Lic. Pedro Misacc Naranjo, Msc.
Coordinación técnica: Lic. María J. Delgado
Diseño gráfico: Lic. Danissa Colmenares
Diagramación: Lic. Alba Gil
Fecha de publicación: abril, 2023





La presente obra fue evaluada por pares académicos
experimentados en el área.

Catalogación en la Fuente



Geometría Plana para la Ingeniería. Ejercicios resueltos
/ Víctor Hugo Vásconez Velasco, Daniela Carina
Vásconez Núñez, Vanessa Alexandra Vásconez Núñez y
Fernando Mauricio Tello Oquendo.--Ecuador: Editorial
CIDE, 2023.

288 p.: incluye tablas, figuras; 17,6 x 25 cm.

ISBN: 978-9942-616-32-6

Semblanza de los Autores

Víctor Hugo Vásconez Velasco

Ecuatoriano, reside en Riobamba, es Ingeniero Mecánico (1983) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente (2002) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Magíster en Docencia Universitaria e Investigación Educativa (2003) por la Universidad Nacional de Loja. Se desempeñó por 34 años como profesor principal en la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en las Áreas de Ciencias Básicas, con las asignaturas de Geometría Plana y Trigonometría. Se desempeñó como Director de la Carrera de Ingeniería Mecánica y Vicedecano de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Daniela Carina Vásconez Núñez

Ecuatoriana, reside en Riobamba, es Ingeniera Mecánica (2011) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster en Tecnología Energética para el Desarrollo Sostenible (2014), Máster en Cultura Científica y de la Innovación (2021) y Doctora (Ph.D.) en Ingeniería y Producción Industrial (2019) por la Universidad Politécnica de Valencia-España. Profesora e investigadora universitaria de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el área de energía y ciencias básicas. Miembro del grupo de investigación GIDENM; autora de varios artículos científicos publicados en revistas indexadas regionales y de alto impacto; ha participado en varios certámenes académicos en el área de energía a nivel nacional e internacional.

Vanessa Alexandra Vásconez Núñez

Ecuatoriana, reside en Riobamba, es Ingeniera Electrónica en Telecomunicaciones y Redes (2012) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster Universitario en Ingeniería de Computadores y Redes (2016) por la Universidad Politécnica de Valencia-España, Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación (2022) por la Universidad Internacional de la Rioja - España. Fue docente universitaria en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo y en la Universidad Nacional de Chimborazo, actualmente se desempeña como Técnico de Apoyo Académico en la Universidad Nacional de Chimborazo. Autora de artículos de investigación publicados en revistas indexadas. Ha participado en cursos, talleres, seminarios y congresos a nivel nacional e internacional.

Fernando Mauricio Tello Oquendo

Ecuatoriano, reside en Riobamba, es Ingeniero Mecánico (2011) por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo-Ecuador, Máster en Tecnología Energética para el Desarrollo Sostenible (2014), Máster en Cultura Científica y de la Innovación (2021) y Doctor (Ph.D.) en Ingeniería y Producción Industrial (2019) por la Universidad Politécnica de Valencia-España. Profesor e investigador universitario de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el área de energía. Miembro del grupo de investigación GIDENM; autor de varios artículos científicos publicados en revistas indexadas regionales y de alto impacto, ha participado en varios certámenes académicos en el área de energía a nivel nacional e internacional; miembro de comités editoriales de revistas regionales, par revisor de varias revistas indexadas internacionales.



Dedicatoria

A la memoria de mis padres Teresita y Luis, por su apoyo, amor incondicional y su ejemplo de perseverancia.

Victor Hugo Vásquez Velasco

Índice

Semblanza de los autores	9
Dedicatoria	11
Introducción	15

Capítulo 1 Segmentos rectilíneos

1.1 Introducción teórica	19
1.2 Ejercicios de segmentos rectilíneos	23

Capítulo 2 Ángulos en el plano

2.1 Introducción teórica	62
2.1.1 Unidades principales para ángulos	62
2.1.2 Tipos de ángulos	62
2.2 Ejercicios resueltos de ángulos en el plano	66

Capítulo 3 Polígonos

3.1 Introducción teórica	104
3.2 Ejercicios resueltos de polígonos	105

Capítulo 4

Triángulos

4.1 Introducción teórica	132
4.2 Ejercicios resueltos de triángulos	139

Capítulo 5

Círculo y circunferencia

5.1 Introducción teórica	194
5.2 Ejercicios resueltos de círculo y circunferencia	198

Capítulo 6

Áreas de regiones rayadas

6.1 Introducción teórica	240
6.2 Ejercicios resueltos de áreas de regiones rayadas	243
Referencias	287

Introducción

“No hay un camino real para la Geometría.”

— Euclides

La Geometría Plana es una parte de la matemática que se encarga del estudio de las propiedades y las medidas de una figura geométrica en un plano. Para representar distintos aspectos de la realidad, la geometría plana emplea los sistemas formales o axiomáticos (compuestos por símbolos que se unen respetando reglas y que forman cadenas, las cuales también pueden vincularse entre sí) y a nociones como rectas, curvas y puntos, entre otras.

La presente obra tiene el objetivo de brindar al lector una herramienta para definir los conceptos básicos de la Geometría Plana, poniendo énfasis en las propiedades, teoremas, operaciones de segmentos, ángulos, triángulos, polígonos, circunferencia y áreas, para su eficaz aplicación en la resolución de ejercicios. Los ejercicios que se han desarrollado utilizando procedimientos sencillos, proposiciones fundamentales, ayudando de esta forma a los lectores en mejorar el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría Plana.

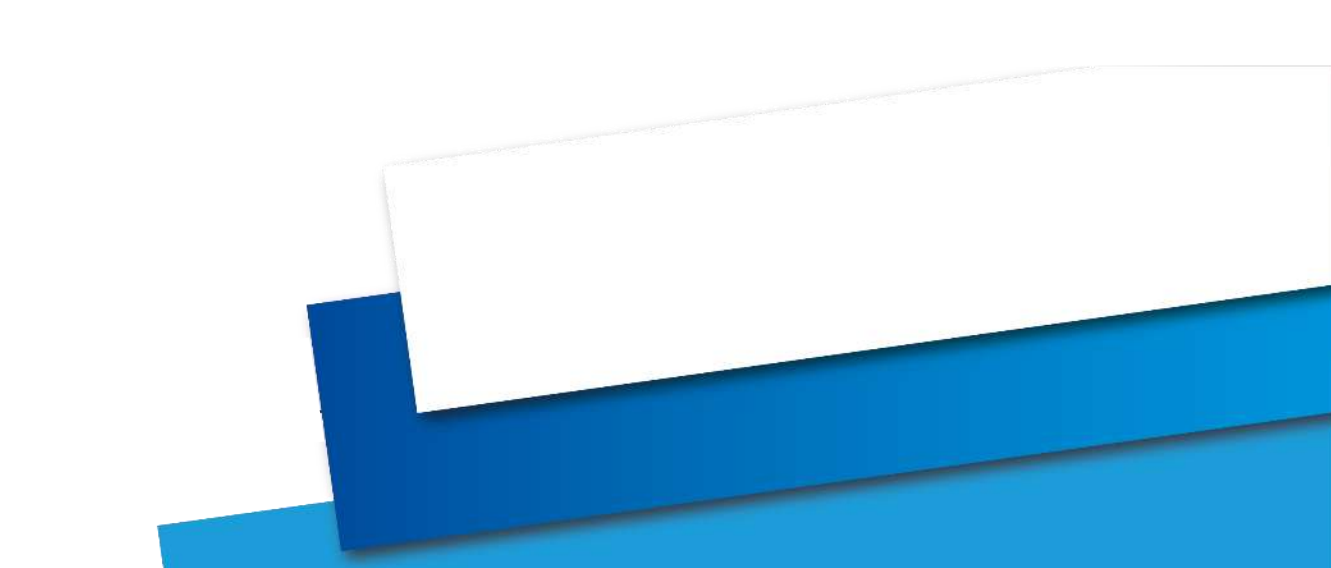
En este libro se presentan ejercicios tipo que son base fundamental para el ingeniero en el desarrollo de habilidades y destrezas que contribuyen en su desenvolvimiento en el álgebra, dibujo técnico, cálculo, trigonometría, física, y demás tópicos básicos de ingeniería. En esta obra encontrarán 155 ejercicios de: segmentos rectilíneos, ángulos, triángulos, polígonos, círculo y regiones rayadas, además, cada capítulo cuenta con una introducción teórica, que permitirá recordar los fundamentos geométricos aplicados en la solución de los ejercicios.

Los logros de aprendizaje que se persiguen con la presente obra son que los lectores sean capaces de identificar las operaciones con segmentos rectilíneos, reconocer los tipos de ángulos, determinar los teoremas aplicados a polígonos, identificar los tipos de triángulos, sus teoremas, postulados, así como los puntos, segmentos y rectas notables del triángulo; aplicar los teoremas y corolarios del círculo, así como las relaciones métricas en la circunferencia y finalmente calcula áreas de diferentes figuras geométricas.



CAPÍTULO 1

Segmentos rectilíneos



Capítulo 1

Segmentos rectilíneos

“El Álgebra no es más que Geometría y la Geometría no es más que Álgebra abstracta”

— Sophie Germain.

Objetivo

Emplear de los elementos simples de la Geometría Plana, definiendo e interpretando los métodos de demostración, aplicando las operaciones básicas y proposiciones para la resolución de ejercicios de segmentos rectilíneos.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Aplicar las operaciones aritméticas en los segmentos rectilíneos.
- Aplicar las propiedades de la proporcionalidad entre segmentos.
- Analizar los métodos de demostración.
- Realizar ejercicios de aplicación sobre segmentos rectilíneos siguiendo un proceso adecuado y sencillo.

Introducción teórica

Operaciones con segmentos rectilíneos

Suma de segmentos

La adición de dos o más segmentos consecutivos es otro segmento cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de todos y cada uno de los segmentos parciales considerados.

Resta de segmentos

Se llama diferencia de dos segmentos, teniendo que el primer segmento es mayor que el segundo, a un tercer segmento tal que, sumando con el menor llamado SUSTRAENDO, se obtenga un segmento igual al mayor o MINUENDO.

Producto de un segmento por un número natural

Multiplicar un segmento por un número natural es hallar la suma de tantos segmentos iguales al considerado, como unidades expresan el número.

División de un segmento por un número natural

Se llama cociente de un segmento para un número natural, a otro segmento total que multiplicado por el número considerado se obtenga

un segmento igual al primero. Todo segmento puede dividirse en cualquier número de partes iguales.

Razón simple

Es el número que resulta como cociente al dividir la medida de uno entre la medida del otro, estando ambas medidas expresadas en las mismas unidades, una razón se puede presentar como una fracción, quebrado o una división. La razón a la vez es una cantidad adimensional o cantidad abstracta.

Proporción

Es la proposición de que dos razones son iguales, debiendo cumplirse que el valor de la una razón debe ser igual al valor de la otra razón. En una proporción también existen lo que se puede conocer como elementos extremos, elementos medios, términos antecedentes, y términos consecuentes.

Propiedades de las proporciones y serie de razones

- En una proporción pueden invertirse las razones.
- El producto de los extremos es igual al producto de los medios.
- En una proporción a cada antecedente se le puede sumar su respectivo consecuente o, a su vez, a su consecuente sumar su respectivo antecedente.

- En una proporción a cada antecedente se le puede restar su respectivo consecuente o, a su vez, a cada consecuente se le resta su respectivo antecedente.
- En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes; como uno cualquiera de sus antecedentes es su respectivo consecuente.
- La resta de los antecedentes con respecto a la resta de los consecuentes es igual a cualquiera de las razones.
- En toda proporción, la suma de los términos de la primera razón es a su diferencia, como la suma de los términos de la segunda razón es a su diferencia.
- En toda proporción, la suma de los términos de la primera razón es a la suma de los términos de la segunda razón, como la diferencia entre los términos de la primera razón es a la diferencia entre los términos de la segunda.
- Si en una proporción se cambian los medios entre sí, a los extremos entre sí, se obtiene una nueva proporción.

División interna de un segmento

Consiste en ubicar un punto que se encuentre en el interior del segmento planteado como dato.

División externa de un segmento

Consiste en localizar un punto que se encuentra en el exterior del segmento.

División armónica

Consiste en encontrar simultáneamente un punto en el interior y exterior del segmento dado; es una combinación de los casos anteriores.

Ejercicios de segmentos rectilíneos

Ejercicio 1.1.

Para el segmento de la figura 1.1, determine la coordenada del punto M conociendo que $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$ y que el segmento AB es igual al segmento PM.

Figura 1.1



$$H) \frac{AP}{PB} = \frac{3}{4}$$

$$AB = PM$$

$$T) M = ?$$

Solución:

a) $\overline{AB} = \overline{PM}$ por hipótesis

b) $AB = 600 + |-500|$ suma de seg.

$$\overline{AB} = 1100 \text{ unid.} = \overline{PM}$$

c) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{3}{4}$ por hipótesis

d) $\frac{AD + PB}{PB} = \frac{3 + 4}{4}$ propiedad de las proporciones

e) $AP + PB = AB$ suma de seg.

$$\frac{AB}{PB} = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1100}{PB} = \frac{7}{4}$$

f) $PB = 628.57 \text{ unid.}$

g) $PM = PB + BM$ suma de seg. BM

$$= (1100 - 628.57) \text{ unid.}$$

$$BM = 471.43 \text{ unid.}$$

$$M = B + BM = 600 + 471.43 \quad : \quad M$$

$$= 1071.43 \text{ unid.} \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 1.2. ////

Para el segmento de la figura 1.2, determine la longitud del segmento PR conociendo que $\frac{AP}{PB} = 5/3$, la longitud del segmento AB es 40 unidades y que el segmento PB es igual al segmento BR.

Figura 1.2



$$H) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{5}{3}$$

$$AB = 40 \text{ unid}$$

$$PB = BR$$

$$T) PR = ?$$

Solución:

$$a) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{5}{3} \quad \text{por } \Leftrightarrow \text{hipótesis}$$

$$b) \quad \frac{AP + PB}{PB} = \frac{5 + 3}{3} \quad \text{propiedad de las proporciones}$$

$$c) \quad AP + PB = AB \quad \text{por hipótesis}$$

(c) en (b)

$$\frac{AB}{PB} = \frac{8}{3} \quad : \quad \frac{40}{PB} = \frac{8}{3} \quad : \quad PB = 15 \text{ unid}$$

$$= BR \quad \text{por hipótesis}$$

$$PR = 2PB = 2BR = 2(15 \text{ unid}) \quad . \quad : \quad PR = 30 \text{ unid.} \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.3.

Para el segmento de la figura 1.3, demuestre que $AE + BC - 2AC = BD$ conociendo $AC = DE$.

Figura 1.3



$$H) AC = DE$$

$$T) AE + BC - 2AC = BD$$

Solución:

$$a) \quad AE = AB + BD + DE \quad \text{por suma de seg.}$$

$$b) \quad BC = BD - CD \quad \text{por diferencia de seg.}$$

$$(a) + (b)$$

$$c) \quad AE + BC = AB + BD + DE + BD - CD$$

$$d) \quad AB = AC - BC \quad \text{por diferencia de segmentos}$$

$$e) \quad AC = DE \quad \text{por hipótesis}$$

$$(b), (d) \text{ y } (e) \text{ en } (c)$$

$$f) \quad AE + BC = 2BD + AC + AC - BC - CD$$

$$\Rightarrow \quad AE + BC = 2BD + 2AC - (BC + CD)$$

$$AE + BC = 2BD + 2AC - BD$$

$$AE + BC - 2AC = BD \quad \text{LQQD}$$

Ejercicio 1.4.

En la figura 1.4, el punto “Q” divide externamente al segmento AB en una razón $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$. Siendo M el punto medio de AB. Determinar la longitud de QM, si AM = 28 unidades.

Figura 1.4



$$H) \frac{x}{y} = \frac{2}{9}$$

$$AM = 28 \text{ unid.}$$

$M = \text{Punto medio de } AB$

$$T) QM = ?$$

Solución:

$$a) \frac{AQ}{QB} = \frac{2}{9}$$

$$b) \frac{AQ}{BQ - AQ} = \frac{2}{9 - 2} \quad \text{por propiedad de las proporciones}$$

$$c) BQ - AQ = AB \quad \text{Diferencia de segmentos}$$

(c) en (b)

$$d) \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{7}$$

$$e) AB = AM + AM \quad \text{por hipótesis.}$$

$$f) AB = 56 \text{ unid.}$$

(f) en (d)

$$g) AQ = \frac{2AB}{7} = \frac{2(56 \text{ unid.})}{7} = 16 \text{ unid.}$$

$$h) QM = AQ + AM \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$QM = (16 + 28) \text{ unid.} \quad : \quad QM = 44 \text{ unid.} \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.5.

Dado el segmento de la figura 1.5, determine la longitud del segmento CD sabiendo que la longitud del segmento DE es igual a dos veces la longitud del segmento CD; la longitud del segmento DE es igual a tres veces la longitud del segmento AB y que la longitud del segmento AE es 100 unidades.

Figura 1.5



$$H) DE = 2CD$$

$$3AB = DE$$

$$AE = 100 \text{ unidades}$$

$$T) CD = ?$$

Solución:

$$a) \quad AC = 2AB = 2BC \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad AE = 100 \text{ unid.} \quad \text{por hipótesis}$$

$$c) \quad AB + BC + CD + DE = 100 \text{ unid.} \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$d) \quad AB + BC + CD + 3AB = 100$$

$$e) \quad 5AB + CD = 100 \text{ unid.}$$

$$f) \quad AB = \frac{DE}{3} = \frac{2CD}{3} \quad \text{por hipótesis}$$

(f) en (e)

$$h) \quad 5\left(\frac{2}{3}CD\right) + CD = 100 \text{ unid.}$$

$$\frac{10}{3}CD + CD = 100 \text{ unid.}$$

$$\frac{13}{3}CD = 100 \text{ unid.}$$

$$CD = \frac{300 \text{ unid.}}{13} \quad : \quad \mathbf{CD = 23,07 \text{ unidades} \quad LQQD.}$$

Ejercicio 1.6.

Encontrar las coordenadas de P y Q que dividen armónicamente al segmento AB de la figura 1.6, sabiendo que: $X_A = 100$ unidades y $X_B = 800$ unidades, en una razón $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$.

Figura 1.6



$$H) \frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

$$T) P \text{ y } Q = ?$$

Solución:

$$a) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = \frac{1}{4} \quad \text{por definición de división armónica}$$

$$b) \quad \frac{AP + PB}{PB} = \frac{1 + 4}{4} \quad \text{por propiedad de las proporciones}$$

$$c) \quad \frac{AB}{PB} = \frac{5}{4}$$

$$AB = (800 - 100)\text{unid.} = 700 \text{ unid.}$$

$$d) \quad \frac{700}{PB} = \frac{5}{4} \Rightarrow PB = 560 \text{ unid.}$$

$$e) \quad P = B - PB \quad \text{coordenada de P}$$

(d) en (a)

$$P = 800 - 560 \quad : \quad * \quad P = 240 \text{ LQQD.}$$

$$f) \quad \frac{AQ}{QB - AQ} = \frac{1}{4 - 1} \quad \text{por propiedad de las proporciones}$$

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{1}{3} \quad : \quad QA = 233,3 \text{ unid.}$$

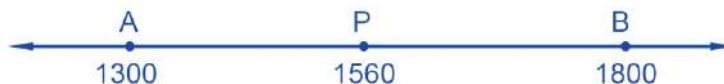
$$h) \quad Q = A - AQ \quad \text{Coordenada de Q}$$

$$Q = 100 - 233,3 \quad : \quad * \quad Q = -133,3 \text{ LQQD.}$$

Ejercicio 1.7.

El punto P divide internamente al segmento AB de la figura 1.7, teniendo las coordenadas de: A = 1300 u, B = 1800 u y P = 1560 u. Determinar la razón x/y.

Figura 1.7



T) $x/y=?$

Solución:

a) $\frac{AP}{PB} = \frac{x}{y}$ por definición de división interna

b) $AP = P - A$ por coordenadas

$$AP = 1560 - 1300 \quad : \quad AP = 260 \text{ unidades} \quad (b *)$$

c) $PB = B - P$ por coordenadas

$$PB = 1800 - 1560 \quad : \quad PB = 240 \text{ unidades} \quad (c *)$$

(b *) y (c *) en (a)

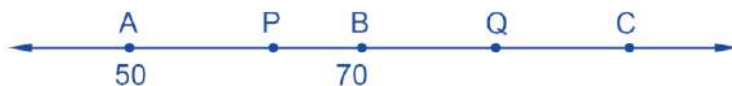
$$\frac{260 \text{ unid.}}{240 \text{ unid.}} = \frac{x}{y} \quad : \quad \frac{x}{y} = 1.083 > 1 \quad \text{LQQD}$$

Ejercicio 1.8.

Hallar las coordenadas de los puntos P, Q y C de la figura 1.8,

sabiendo que se cumple la igualdad $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{7}{2} = \frac{BQ}{QC}$.

Figura 1.8



$$H) \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{7}{2} = \frac{BQ}{QC}$$

$$T) \quad P, Q \text{ y } C = ?$$

Solución:

a) $AB = 70 - 50 \quad : \quad AB = 20 \text{ unidades}$

b) $\frac{AP}{PB} = \frac{7}{2} \quad \text{por hipótesis}$

c) $\frac{AP + PB}{PB} = \frac{7 + 2}{2} \quad \text{propiedad de las proporciones}$

$$\frac{20}{PB} = \frac{9}{2} \quad : \quad PB = 4,4 \text{ unidades}$$

d) $PB = B - P \quad \text{por coordenadas}$

$$P = 70 - PB \quad * \quad P = 65.6 \quad \text{LQQD.}$$

e) $\frac{AQ}{QB} = \frac{7}{2} \quad \text{por hipótesis}$

f) $\frac{AQ - QB}{QB} = \frac{7 - 2}{2} \quad \text{propiedad de las proporciones}$

$$\frac{20}{QB} = \frac{5}{2} \quad : \quad QB = 8 \text{ unidades}$$

g) $Q = B + QB \quad \Rightarrow \quad Q = 70 + 8 \quad : \quad * \quad Q$
 $= 78 \quad \text{LQQD.}$

h) $\frac{BQ}{QC} = \frac{7}{2} \quad \text{por hipótesis} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{QC} = \frac{7}{2} \quad : \quad QC$
 $= 2,28 \text{ unidades}$

i) $C = Q + QC \quad : \quad C = 78 + 2.28 \quad \Rightarrow \quad * \quad C$
 $= 80.28 \quad \text{LQQD.}$

Ejercicio 1.9.

P y O dividen armónicamente al segmento AB de la figura 1.9 en una razón, siendo $AB = 60$ unidades. Determinar la longitud del segmento AP sabiendo que $3AO = PB$.

Figura 1.9



H) $AB = 60$ unidades

$3AO = PB$

T) $AP = ?$

Solución:

a) $\frac{AP}{PB} = \frac{AO}{QB}$ *por definición de división armónica*

b) $AP + PB = AB$ *suma de segmentos*

c) $\frac{AP}{AB - AP} = \frac{AO}{OB - AO}$ *propiedad de las proporciones*

d) $AB + AO = OB$: $OB - AO = AB = 60$ unidades

e) $\frac{AP}{PB - AP} = \frac{AO}{60}$

f) $3AO = PB$ *por hipótesis*

h) $\frac{AP}{3AO - AP} = \frac{AO}{60}$

$$i) \quad 3\overline{AO}^2 - (AO)(AP) - 60AP = 0$$

(b) y (f) en (i)

$$j) \quad AO^2 + 20AO - 600 = 0$$

$$AO_1 = 16.46 \text{ unid.} \quad : \quad AO_2 = -36.46 \text{ unid.}$$

$$3(16.46)\text{unid} = PB \quad : \quad PB = 49.38 \text{ unidades}$$

$$k) \quad AP = AB - PB$$

$$AP = (60 - 49.38)\text{unid.} \quad : \quad AP$$

$$= 10.62 \text{ unidades} \quad LQQD$$

Ejercicio 1.10. ///

Dado el segmento de la figura 2.10, si Q divide externamente al segmento AB en media y extrema razón tal que $\frac{x}{y} < 1$ y $AB = 80 \text{ u.}$

Determinar QB.

Figura 1.10



$$H) \quad AB = 80 \text{ unidades}$$

$$T) \quad \overline{QB} = ?$$

Solución:

a) $\overline{AQ}^2 = BQ \cdot AB$ por definición de media y extrema razón

b) $AQ = BQ - AB$ por diferencia de segmentos

(b) en (a)

c) $(BQ - AB)^2 = BQ \cdot AB$

d) $\overline{BQ}^2 - 2BQAB + \overline{AB}^2 = BQAB$

e) $\overline{BQ}^2 - 160BQ + 80^2 = 80BQ$

f) $\overline{BQ}^2 - 160\overline{BQ} - 80\overline{BQ} + 6400 = 0 \quad : \quad \overline{BQ}^2 - 240BQ + 6400 = 0$

g) $BQ = \frac{240 \pm \sqrt{(240)^2 - 4(6400)}}{2} = \frac{240 \pm \sqrt{32000}}{2} = \frac{240 \pm 178.89}{2}$

* $BQ = 209.4 \text{ unidades} \quad LQQD.$

Ejercicio 1.11. ///

Dado el segmento de la figura 1.11, si “P” divide externamente al segmento AB en media y extrema razón tal que $\frac{x}{y} < 1$, $AB = 100$ unidades. Determinar PB.

Figura 1.11



H) $\frac{x}{y} < 1$

$$AB = 100 \text{ unidades}$$

$$T) PB = ?$$

Solución:

$$a) \overline{AP}^2 = (AB)(PB) \quad \text{por definición de media y extrema razón}$$

$$b) AP = AB - PB \quad \text{por diferencia de segmentos}$$

(b) en (a)

$$c) (AB - PB)^2 = ABPB$$

$$d) AB^2 - 2(AB)(PB) + PB^2 = (AB)(PB)$$

$$e) (100)^2 - 2(100)(PB) + PB^2 = (100)PB$$

$$f) PB^2 - 300PB + 10.000 = 0$$

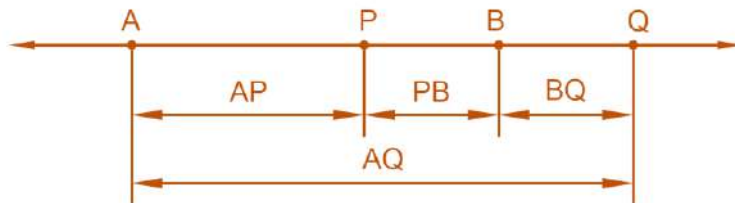
$$g) PB = \frac{300 \pm \sqrt{(300)^2 - 4(10000)}}{2} = \frac{300 \pm 223.6}{2}$$

$$PB = 261,8 \text{ unidades} \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.12. ///

Dado el segmento de la figura 1.12, si P y Q dividen armónicamente al segmento, AB entonces la relación correcta es:

Figura 1.12



$$(a) \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}}$$

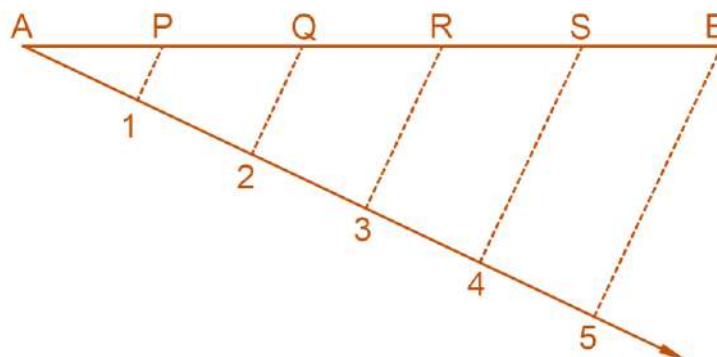
$$(b) \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$$

$$(c) \frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{AQ}}$$

(d) *ninguna* $\Rightarrow$ * **Respuesta correcta (d)**

Ejercicio 1.13. //

Dado un segmento AB de la figura 2.13, de coordenadas (-159; 136), encontrar las coordenadas de los puntos que dividen al segmento en cinco partes de igual medida.



Solución:

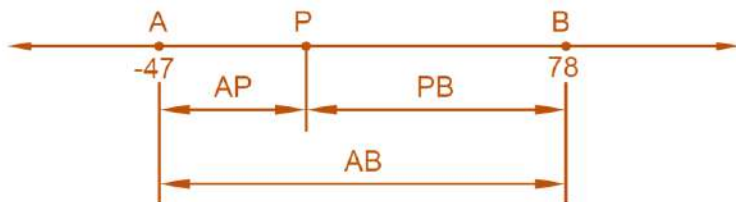
AB es el segmento dado

Trazamos una recta oblicua desde el punto A con una abertura cualquiera, esta es dividida en cinco partes iguales, desde el último punto de división (5) trazamos una perpendicular hacia el extremo del segmento planteado, y luego trazamos segmentos paralelos a esta recta

Ejercicio 1.14.

Dado un segmento AB de la figura 1.14, de coordenadas $(-47 ; 78)$, encontrar la relación X/Y si: $AP = 55$, “P”, divide internamente al segmento AB.

Figura 1.14



Solución:

a) *Coordenada de A = -47 por hipótesis*

b) *Coordenada de B = 78*

c) $AB = |-47| + 78 = 125$ unid.

d) $AB = AP + PB$ por suma de segmentos

e) $\frac{AP}{PB}$

$= \frac{x}{y} < 1$ por definición de división interna de un segmento

f) $AP = 55$ unid. por hipótesis

(f) en (d)

g) $PB = 125$ unid. $- 55$ unid. $= 70$ unid.

(f) y (g) en (e)

$$\frac{55 \text{ unid.}}{70 \text{ unid.}} = \frac{x}{y} = 0.78 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = 0.786 < 1 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 1.15. //

Dado un segmento AB de coordenadas $(-37;75)$, encontrar la relación

$\frac{x}{y} > 1$, si: $BQ = 152$ (Q divide- externamente al segmento AB).

Figura 1.15



Solución:

a) $AQ = AB + BQ$ por suma de segmentos

b) $AB = |-37| + 75 = 37 + 75$

c) $AB = 112$ unid.

(c) en (a)

d) $AQ = (112 + 152)$ unid. $\Rightarrow$ AQ
 $= 264$ unidades (d')

e) $\frac{AQ}{QB} = \frac{x}{y} > 1$ por def. de división interna de segmentos

f) $QB = 152$ unid.

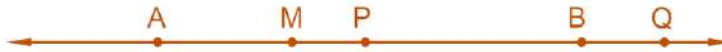
(d') y (f) en (e)

$$\frac{264 \text{ unid.}}{152 \text{ unid.}} = \frac{x}{y} \quad : \quad \frac{x}{y} = 1.737 > 1 \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.16. ///

Si P y Q dividen armónicamente al segmento AB de la figura 1.16, sabiendo que $AM=ME$, demuestre que $MB^2 = (MP)(MQ)$.

Figura 1.16



H) $AM = MB$

T) $MB^2 = (MP)(MQ)$

Solución:

a) $AP = AM + MP$ suma de segmentos

b) $AQ = AM + MQ$

c) $BQ = MQ - MB$

d) $PB = MB - MP$

e) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$ división armónica

f) $\frac{AM + MP}{MB - MP} = \frac{AM + MQ}{MQ - MB}$

h) $MB \cdot MQ - MB^2 + MP \cdot MQ - MP \cdot MB$
 $= MB^2 - MB \cdot MP + MQ \cdot MB - MQ \cdot MP$

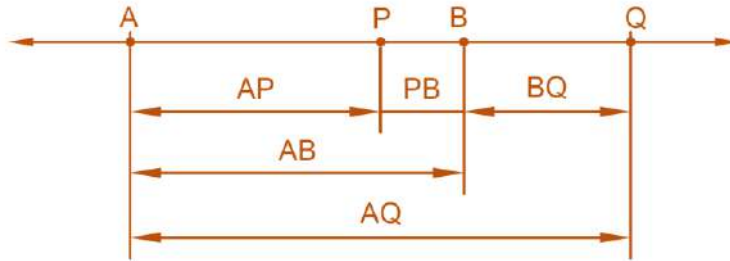
i) $-2MB^2 + 2MP \cdot MQ = 0$

* $MB^2 = (MP)(MQ)$ LQQD.

Ejercicio 1.17. ///

Dado el segmento de la figura 1.17, si P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y} > 1$, si $AP=PQ$; Demostrar que $BQ=2PB$.

Figura 1.17



Solución:

a) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}$ *Por def. de division armónica*

b) $\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ}$ *Por suma de segmentos*

c) $\overline{AP} = \overline{PQ}$ *Por hipótesis*

d) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP} + \overline{PQ}}{\overline{BQ}}$ *Por propiedad de las proporciones*

e) $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PQ} + \overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{2\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$

f) $\overline{PQ} * \overline{BQ} = \overline{PB} * 2\overline{PQ}$

$$\begin{aligned} \overline{BQ} &= \frac{2\overline{PQ} * \overline{PB}}{\overline{PQ}} \Rightarrow * \overline{BQ} \\ &= 2\overline{PB} \quad \text{LQQD.} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.18.

Dado el segmento de la figura 1.18, si los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y} < 1$, ¿Cuál es la relación x/y si; AB= 5640 unidades y PQ= 12654 unidades?

Figura 1.18**Solución:**

a) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1$ *Por división armónica*

b) $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB}$ *por diferencia de segmentos*

e) $\overline{PB} = X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\overline{PB} = \frac{-14028 \pm \sqrt{(14028)^2 - 4(2)(-71368560)}}{(2)(2)}$$

$$\overline{PB} = \frac{-14028 \pm 27708}{4} \quad : \quad \overline{PB}_1 = 3420 \text{ unidades}$$

$$\overline{PB}_2 = 10434 \text{ Valor que que no se considera}$$

b) $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} \quad : \quad \overline{AP} = (5640 - 3420) \text{ unidades}$

$$\overline{AP} = 2220 \text{ unidades}$$

c) $\overline{QB} = \overline{QP} + \overline{PB} \quad : \quad \overline{QB} = (12654 + 3420) \text{ unidades}$

$$\overline{QB} = 16074 \text{ unidades}$$

$$\overline{QA} = \overline{QB} - \overline{AP} \quad : \quad \overline{QA} = (16074 - 2220) \text{ unidades}$$

$$f) \quad \overline{QA} = 10434 \text{ unidades}$$

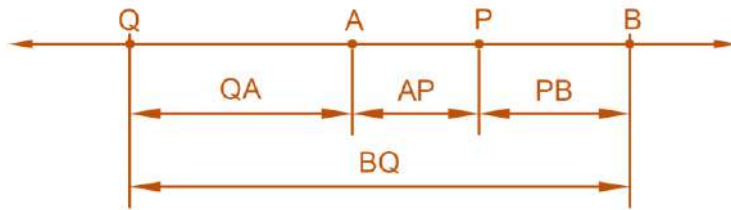
(f) en (a)

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1 \quad ; \quad \frac{2220}{3420} = \frac{10434}{16074} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad * \quad \frac{x}{y} = 0,649 < 1 \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.19. ///

Dado el segmento de la figura 1.19, si los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y} < 1$. ¿Cuál es la relación x/y si; $PB = 3420$ y $BQ = 16074$?

Figura 1.19



Solución:

$$a) \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1 \quad \text{por def. división armónica}$$

$$b) \quad \overline{QP} = \overline{QB} - \overline{PB} \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$\overline{QP} = (16074 - 3420) \text{ unidades} \quad \Rightarrow \quad \overline{QP} = 12654 \text{ unidades}$$

$$c) \quad \overline{QA} = \overline{QP} - \overline{AP} \quad \Rightarrow \quad \overline{QA} = 12654 - \overline{AP} \quad (c *)$$

(c *) en (a)

$$\frac{\overline{AP}}{3420} = \frac{12654 - \overline{AP}}{16074} \quad : \quad \text{Asumimos que: } \overline{AP} = X$$

$$19494 X = 43276680 \quad \Rightarrow \quad (d) \quad X = \overline{AP} \\ = 2220 \text{ unidades}$$

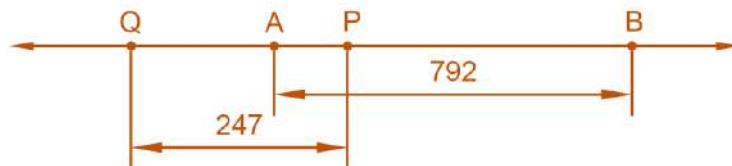
(d) en (a)

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1 \quad : \quad \frac{2220}{3420} = \frac{12654 - 2220}{16074} \\ = 0.649 \quad \Rightarrow \quad * \quad \frac{x}{y} = \mathbf{0.649} \\ < 1 \quad \mathbf{LQQD}$$

Ejercicio 1.20. ///

Para el segmento de la figura 1.20, si los puntos P y Q dividen armónicamente al segmento AB en relación $\frac{x}{y} < 1$, ¿Cuál es la relación x/y sí; AB = 792 unidades y PQ igual a 247 unidades?

Figura 1.20



Solución:

$$a) \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1 \quad \text{por def. división armónica}$$

$$b) \quad \overline{QA} = \overline{QB} - \overline{AB} \quad \text{por resta de segmentos}$$

$$c) \quad \overline{QB} = \overline{PQ} + \overline{PB}$$

$$d) \quad \overline{AB} = \overline{AP} + \overline{PB} \quad \text{por suma de segmentos}$$

(b), (c) y (d) en (a)

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB} - \overline{PB}}{\overline{PB}} &= \frac{\overline{QP} + \overline{PB} - \overline{AB}}{\overline{QP} + \overline{PB}} \Rightarrow \frac{792 - \overline{PB}}{\overline{PB}} \\ &= \frac{247 + \overline{PB} - 792}{247 + \overline{PB}} \quad : \quad \text{Asumimos que: } \overline{PB} \\ &= X \end{aligned}$$

$$2X^2 - 1090X - 195624 = 0 \quad : \quad \overline{PB} = 687.31 \text{ unidades}$$

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \overline{AB} - \overline{PB} \Rightarrow \overline{AP} \\ &= (792 - 687.31) \text{ unidades} \quad : \quad \overline{AP} \\ &= 104.69 \text{ unidades} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{QA} &= \overline{QP} - \overline{AP} \Rightarrow \overline{QA} \\ &= (247 - 104.69) \text{ unidades} \quad : \quad \overline{QA} \\ &= 142.31 \text{ unidades} \end{aligned}$$

$$\overline{QB} = \overline{QP} + \overline{PB}$$

$$\overline{QB} = (247 + 687.31) \text{ unidades} \quad : \quad \overline{QB} = 984.31 \text{ unidades}$$

$$a) \quad \frac{104.69}{687.31} = \frac{142.31}{984.31}$$

$$0.1523 = 0.1523 \quad \therefore \quad * \quad \frac{x}{y} = 0.1523 < 1 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 1.21.

Para el segmento de la figura 1.21, determine la longitud del segmento PR conociendo que $\frac{AP}{PB} = 5/3$, la longitud del segmento AB es 20 unidades y que el segmento PB es igual al segmento BR.

Figura 1.21



Figura 1.21

$$H) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{5}{3}$$

$$AB = 20 \text{ unidades}$$

$$PB = BR$$

$$T) PR = ?$$

Solución:

$$a) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{5}{3} \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad \frac{AP + PB}{PB} = \frac{5 + 3}{3} \quad \text{propiedad de las proporciones}$$

$$c) \quad AP + PB = AB \quad \text{suma de segmentos}$$

(c) en (b)

$$\frac{AB}{PB} = \frac{8}{3} \quad ; \quad \frac{20}{PB} = \frac{8}{3} \quad ; \quad \overline{PB} = 7.5 \text{ unidades}$$

$$d) \quad PR = PB + BR \quad \text{suma de segmentos}$$

$$\begin{aligned}
 PB &= BR && \text{por hipótesis} && \Rightarrow && PR \\
 &= (7.5 + 7.5) \text{ unidades} && \Rightarrow && * && PR \\
 &= 15 \text{ unidades} && \text{LQPD.}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.22.

En el segmento de la figura 1.22, Q divide externamente al segmento en una razón $\frac{x}{y} = \frac{2}{9}$. Siendo M el punto medio de AB, determinar la longitud de QM si AM = 28 unidades.

Figura 1.22



Solución:

a) $\frac{AQ}{QB} = \frac{2}{9}$ *proporción de división externa*

b) $\frac{AQ}{BQ - AQ} = \frac{2}{9 - 2}$ *propiedad de las proporciones*

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{2}{9}$$

c) $AB = AM + MB$ *suma de segmentos*
 $\Rightarrow AB = 56 \text{ unidades}$

d) $\frac{AQ}{56} = \frac{2}{9}$: $AQ = 16 \text{ unidades}$

e) $QM = AQ + AM$

$$QM = (16 + 28) \text{ unidades} \quad : \quad * \quad QM \\ = 44 \text{ unidades} \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.23.

Dado el segmento de la figura 1.23, determine la longitud del segmento AB sabiendo que $AP \cdot BQ = PB \cdot AQ$ y que $\frac{1}{PB} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{5}$.

Figura 1.23



H) $AP \cdot BQ = PB \cdot AQ$

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{5}$$

T) $AB = ?$

Solución:

a) $\overline{AP} \cdot \overline{BQ} = \overline{PB} \cdot \overline{AQ}$ *por hipótesis*

b) $AP + PB = AB$ *suma de segmentos*

(b) en (a)

$$(AB - PB) \cdot BQ = PB(BQ - AB)$$

$$BQ \cdot AB - PB \cdot BQ = PB \cdot BQ - PB \cdot AB$$

$$BQ \cdot AB + PB \cdot AB = 2PB \cdot BQ$$

$$AB(BQ + PB) = 2PB \cdot BQ$$

$$\frac{BQ + PB}{PB \cdot BQ} = \frac{2}{AB}$$

$$c) \quad \frac{BQ}{PB \cdot BQ} + \frac{PB}{PB \cdot BQ} = \frac{2}{AB}$$

$$d) \quad \frac{1}{PB} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB} \quad ; \quad \frac{1}{PB} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{5} \quad (e) \text{ por hipótesis}$$

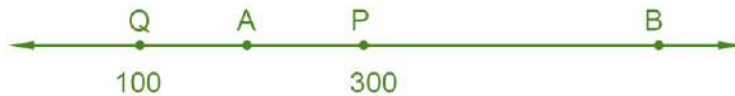
$$(d) = (e)$$

$$* \quad \overline{AB} = 5 \text{ unidades } LQQD.$$

Ejercicio 1.24.

Considere el segmento de la figura 1.24. Dadas las coordenadas $X_Q = 100$ y $X_P = 300$ que dividen armónicamente al segmento AB en una razón de $1/2$, determinar las coordenadas de A y B .

Figura 1.24



$$H) \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

$$T) \quad X_A = ? \quad : \quad X_B = ?$$

Solución:

$$a) \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{x}{y} < 1 \quad \text{por división armónica}$$

$$b) \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad 2\overline{AP} = \overline{PB}$$

$$c) \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad 2\overline{AQ} = \overline{QB}$$

$$\frac{\overline{AP} + \overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{propiedad de las proporciones}$$

$$d) \quad \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB} \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$e) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad \frac{\overline{AB}}{2\overline{AP}} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 3\overline{AP} \quad (e')$$

$$f) \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB} - \overline{AQ}} = \frac{1}{2 - 1} = \frac{1}{1} \quad \text{propiedad de las proporciones}$$

$$g) \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} = 1 \quad ; \quad \overline{AQ} = \overline{AB} \quad (g')$$

$$(e) = (g')$$

$$3\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AB}$$

$$3(P - A) = (A - Q) \quad ; \quad 3(300 - A) = (A - 100)$$

$$900 - 3A = A - 100 \quad : \quad * \quad A$$

$$= 250 \quad \text{LQPD. (Coordenada de A)}$$

Ejercicio 1.25. ///

Para el segmento de la figura 1.25, determine la coordenada del punto C conociendo que $\frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{QB} = \frac{3}{2}$ y que $QB = CP$.

Figura 1.25



$$H) \quad \frac{AP}{PD} = \frac{AQ}{QB} = \frac{3}{2}$$

$$QB = CP$$

T) *Coordenada de C*

Solución:

$$a) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{3}{2} \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad \frac{AP + PB}{PB} = \frac{3 + 2}{2} \quad \text{propiedad de las proporciones}$$

$$c) \quad \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$$

$$d) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{5}{2} \quad : \quad \overline{AB}$$

$$= 60 \text{ unid} + |-80 \text{ unid.}| \quad ; \quad \overline{AB}$$

$$= 140 \text{ unidades}$$

$$\frac{140 \text{ unid.}}{\overline{PB}} = \frac{5}{2} \quad : \quad \overline{PB} = 56 \text{ unidades} \quad : \quad \overline{AP}$$

$$= 84 \text{ unidades}$$

$$e) \quad \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{AQ - QB}{QB} = \frac{3 - 2}{2} \quad ; \quad \frac{140}{\overline{QB}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{QB} = 280 \text{ unidades}$$

$$f) \quad \overline{CP} = \overline{QB} = 280 \text{ unidades} \quad \text{por hipótesis}$$

$$h) \quad Q = B + QB \quad ; \quad Q = 60 + 280 \quad : \quad Q = 340$$

$$i) \quad CP = AC + AP \quad ; \quad \overline{AC} = (280 - 84) \text{ unidades} \\ \Rightarrow \overline{AC} = 196 \text{ unidades}$$

$$j) \quad C = A + AC \quad ; \quad C = -80 - |196| \quad :$$

$$* \quad C = -276 \quad \text{LQPD} \quad \text{Coordenada de C}$$

Ejercicio 1.26. ///

Para el segmento de la figura 1.26, demuestre que $\overline{BE} = \frac{AD+CF}{2}$, sabiendo que $\overline{AB} = \overline{BC}$ y que $\overline{DE} = \overline{EF}$.

Figura 1.26



$$H) \quad \overline{AB} = \overline{BC}$$

$$\overline{DE} = \overline{EF}$$

$$T) \quad \overline{BE} = \frac{AD + CF}{2}$$

Solución:

$$a) \quad AD = AB + BC + CD$$

$$c) \quad CF = CD + DE + EF \quad \text{suma de segmentos}$$

$$b) \quad CF = CD + 2DE \quad : \quad CD = CF - 2DE \quad (b *)$$

$$c) \quad AD = CD + 2AB \quad : \quad CD = AD - 2AB \quad (c *)$$

$$(b *) = (c *)$$

$$f) \quad CF - 2DE = AD - 2AB$$

$$BE = BC + CD + DE = AB + CD + DE$$

$$g) \quad BE = (CF - 2DE) + AB + DE = CF - DE + AB$$

$$h) \quad AB = \frac{(AD - CD)}{2}$$

$$(h) \text{ en } (g)$$

$$j) \quad BE = CF - DE + \frac{(AD - CD)}{2}$$

$$k) \quad BE = CF - \left(\frac{CF - CD}{2}\right) + \left(\frac{AD - CD}{2}\right)$$

$$2BE = 2CF - CF + CD + AD - CD = CF + AD \quad \Rightarrow$$

$$* \quad BE = \frac{AD + CF}{2} \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.27. ///

Para el segmento de la figura 1.27, demuestre que $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \frac{\overline{BD}^2}{4}$, sabiendo que $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Figura 1.27



$$H) \quad \overline{BC} = \overline{CD}$$

$$T) \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD} - \frac{\overline{BD}^2}{4}$$

Solución:

a) $AC = AB + BC$ *suma de segmentos*

b) $AC = AD - CD$

c) $BC = CD$

d) $BD = 2BC = 2CD$ *por hipótesis*

(a) por (b)

e) $AC^2 = (AB + BC)(AD - CD)$

f) $AC^2 = AB \cdot AD - AB \cdot CD + BC \cdot AD - BC \cdot CD$

(c) en (f)

g) $AC^2 = AB \cdot AD - AB \cdot BC + BC \cdot AD - \frac{BD^2}{4}$

h) $AC^2 = AB \cdot AD - AB \cdot \frac{BD}{2} + \frac{BD}{2} \cdot AD - \frac{BD^2}{4} \quad \Rightarrow$

$$AC^2 = AB \cdot AD + \frac{BD}{2} \cdot (AD - AB) - \frac{BD^2}{4}$$

$$AC^2 = AB \cdot AD - \frac{BD}{2} \cdot (BD) - \frac{BD^2}{4} = AB \cdot AD - \frac{BD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$

$$* \quad AC^2 = AB \cdot AD - \frac{BD^2}{4} \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 1.28.

Para el segmento de la figura 1.28, verifique que $m = \sqrt{ab + \frac{(b-a)^2}{4}}$, sabiendo que $BC=DC$, $AB=a$, $BD=b$ y que $AC=m$.

Figura 1.28



$$H) \quad BC = DC$$

$$AB = a$$

$$BD = b$$

$$AC = m$$

$$T) \quad \sqrt{ab + \frac{(b-a)^2}{4}}$$

Solución:

$$a) \quad AC = AB + BC \quad \text{Suma de segmentos}$$

$$b) \quad (AC)^2 = (AB + BC)^2$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + 2(AB)(BC) + BC^2 & \Rightarrow & AC^2 \\ &= AB(AB + 2BC) + BC^2 \end{aligned}$$

$$c) \quad AC^2 = (AB)(AD) + BC^2$$

$$AD - AB = 2BC \quad \Rightarrow \quad BC = \frac{AD - AB}{2}$$

$$f) \quad AC^2 = (AB)(AD) + \left[\frac{AD - AB}{2} \right]^2 \quad :$$

$$= (AB)(AD) + \frac{(AD - AB)^2}{4}$$

$$AC = \sqrt{(AB)(AD) + \frac{(AD - AB)^2}{4}} \Rightarrow$$

$$* \quad m = \sqrt{a \cdot b + \frac{(b - c)^2}{4}} \quad LQQD$$

Ejercicio 1.29. ///

Los segmentos a, b, c son proporcionales a 7, 5 y 6 respectivamente si:

a + b + c = 12 unidades. Calcular las medidas de los segmentos a, b y c.

Solución:

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{a + b + c}{7 + 5 + 6}$$

$$= \frac{12 \text{ unidades}}{18} \quad \text{propiedad de las series de razones}$$

$$\frac{12 \text{ unid.}}{18} = \frac{a}{7} \quad ; \quad a = \frac{(12)(7)}{18} \quad ; \quad a$$

$$= 4.66 \text{ unid.} \quad LQQD.$$

$$\frac{12 \text{ unid.}}{18} = \frac{b}{5} \quad : \quad b = \frac{(12)(5)}{18} \quad : \quad b$$

$$= 3.33 \text{ unid.} \quad LQQD.$$

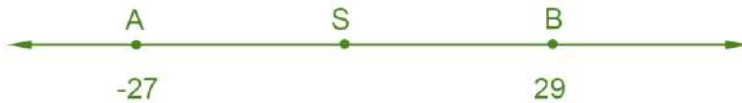
$$\frac{12 \text{ unid.}}{18} = \frac{c}{6} \quad : \quad c = \frac{(12)(6)}{18} \quad : \quad c$$

$$= 4 \text{ unid.} \quad LQQD.$$

Ejercicio 1.30.

Considere el segmento de la figura 1.30. Dado los puntos A y B de coordenadas $(-27 ; 29)$, determinar BS tal que: $BS^2 = AB \cdot AS$ (S es un punto situado entre A y B).

Figura 1.30



Solución:

a) $\overline{AB} = A + B$ por suma de coordenadas

$$\overline{AB} = |-27| + 29 = 56 \text{ unidades}$$

b) $\overline{BS}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AS}$ por hipótesis

c) $\overline{AS} = \overline{AB} - \overline{BS}$ por resta de segmentos

(c) en (b)

$$\begin{aligned} d) \quad \overline{BS}^2 &= \overline{AB}(\overline{AB} - \overline{BS}) & \Rightarrow & \quad \overline{BS}^2 \\ &= 56(56 - \overline{BS}) & ; & \quad \overline{BS}^2 + 56\overline{BS} - 3136 = 0 \end{aligned}$$

$$* \quad \overline{BS} = 34.6 \text{ unidades} \quad \text{LQPD.}$$



CAPÍTULO 2

Ángulos en el plano



Capítulo 2

Ángulos en el plano

“Donde hay materia hay geometría.”

— Johannes Kepler

Objetivo

Desarrollar en los lectores la capacidad de analizar, pensar y resolver casos que involucren el conocimiento geométrico aplicado a los ángulos en el plano, reconociendo los tipos de ángulos y aplicando los teoremas de ángulos planos para la resolución de ejercicios.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Utilizar los sistemas de unidades de ángulos planos.
- Reconocer los tipos de ángulos.
- Aplicar los teoremas de ángulos para resolución de ejercicios.

2.1 Introducción teórica

2.1.1 Unidades principales para ángulos

Sistema sexagesimal. - Se considera a la circunferencia dividida en 360 partes y un ángulo de un grado es el que tiene el vértice en el centro y sus lados son dos radios, cada grado se considera en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto tiene 60 partes iguales llamados segundos.

Sistema centesimal. - Se considera a la circunferencia dividida en 400 partes iguales llamadas "Grados Centesimales", cada grado tiene 100 minutos centesimales y cada minuto tiene 100 segundos centesimales.

Sistema mixto o circular. - En este sistema se usa como unidad el ángulo llamado "Radián". Un "radián" es el ángulo cuyos lados son radios y comprenden un ángulo cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.

2.1.2 Tipos de ángulos

- **Ángulo plano.** - Es una figura formada por dos rectas, semirrectas, o rayos que se cortan en un punto. Las rectas, semirrectas o rayos se llaman lados y el punto común origen.
- **Ángulos nulos.** - Son aquellos ángulos que son iguales a 0 grados.

- **Ángulos convexos.** - Son aquellos ángulos que son mayores de 0 grados, pero menores de dos ángulos rectos.
- **Ángulos agudos.** - Son aquellos ángulos que son menores de un ángulo recto.
- **Ángulos rectos.** - Son aquellos ángulos que son iguales a un ángulo recto, donde sus lados son dos rectas perpendiculares.
- **Ángulos obtusos.** - Son aquellos ángulos que son mayores de un ángulo recto, pero menores de dos ángulos rectos.
- **Ángulos llanos.** - Son ángulos iguales a dos ángulos rectos sus lados son dos rectas linealmente opuestas.
- **Ángulos cóncavos.** - Son aquellos ángulos mayores de dos ángulos rectos y menores de cuatro ángulos rectos.
- **Ángulos de una vuelta.** - Son los ángulos iguales a cuatro ángulos rectos.
- **Ángulos complementarios.** - Son una pareja de ángulos que sumados dan un ángulo recto.
- **Ángulos suplementarios.** - Son una pareja de ángulos que sumados dan dos ángulos rectos.
- **Ángulos consecutivos.** - Son aquellos ángulos que se caracterizan por tener dos elementos comunes, un lado y un vértice y sus medidas se encuentran a uno y otro lado del lado común.
- **Ángulos adyacentes.** - Son dos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes son rayos linealmente opuestos o (alineados).

- **Ángulos opuestos por el vértice.** - Son aquellos ángulos cuyos lados de uno son las prolongaciones en sentido contrario de los lados del otro.

Rectas paralelas

Rectas paralelas son las que estando en el mismo plano y siendo equidistantes se pueden prolongar en ambos sentidos.

Teoremas de los ángulos que tienen sus lados paralelos

- Dos ángulos agudos que tienen sus lados respectivamente paralelos entre sí y dirigidos en el mismo sentido son iguales.
- Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente paralelos entre sí, y dirigidos en sentido contrario son iguales.
- Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios.

Rectas perpendiculares

Se dice que dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales, cada uno es un ángulo recto.

Teoremas de los ángulos que tienen sus lados perpendiculares

- Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares entre si son iguales.
- Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales.
- Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.

Ángulos formados entre dos rectas paralelas cortadas por una secante o transversal

Los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas presentan las siguientes características:

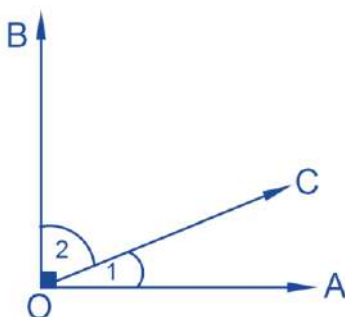
- Los ángulos alternos internos son iguales.
- Los ángulos alternos externos son iguales.
- Los ángulos correspondientes son iguales.
- Los ángulos colaterales internos son suplementarios.
- Los ángulos colaterales externos son suplementarios.

2.2 Ejercicios resueltos de ángulos en el plano

Ejercicio 2.1.

Considere la figura 2.1. Uno de los ángulos complementarios aumentado en 30° es igual al otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Figura 2.1



Solución:

$$\begin{aligned} a) \quad & 1m\angle AOC + 1m\angle COB \\ &= 1\angle \text{Recto} \quad \text{por ser ángulos complementarios} \end{aligned}$$

$$b) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle \text{Recto}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 1m\angle 1 + 30^\circ &= 1m\angle 2 & \Rightarrow & \quad 1m\angle 1 \\ &= 1m\angle 2 - 30^\circ & (c) \end{aligned}$$

(c) en (b)

$$1m\angle 2 - 30^\circ + 1m\angle 2 = 90^\circ$$

$$2m\angle 2 = 90^\circ + 30^\circ$$

$$2m\angle 2 = 120^\circ$$

$$1m\angle 2 = \frac{120^{\circ}}{2} = 60^{\circ}$$

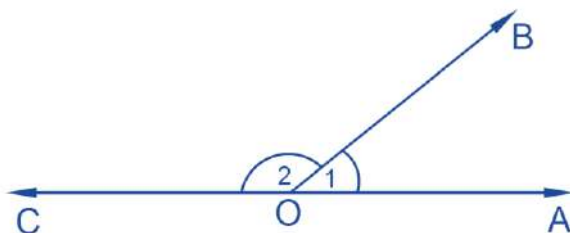
$$* \quad 1m\angle 2 = 60^{\circ}$$

$$* \quad 1m\angle 1 = 30^{\circ} \quad LQDD.$$

Ejercicio 2.2.

Considere la figura 2.2. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos suplementarios, si quitando al menor de ellos 20° y agregándole al mayor, este resulta el triple de lo que queda del menor?

Figura 2.2



Solución:

$$a) \quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC$$

$$= 2\angle \text{Rectos} \quad \text{por ser ángulos suplementarios}$$

$$a') \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^{\circ}$$

Consideramos que:

$$1m\angle 1 = \text{ángulo menor} \quad ; \quad 1m\angle 2 = \text{ángulo mayor}$$

$$b) \quad 3m(1m\angle 1 - 20^{\circ})$$

$$= 1m\angle 2 + 20^{\circ} \quad ; \quad 3m\angle 1 - 60^{\circ} - 20^{\circ}$$

$$= 1m\angle 2$$

$$b') \quad 1m\angle 2 = 3m\angle 1 - 80^{\circ}$$

(b') en (a')

$$1m\angle 1 + 3m\angle 1 - 80^\circ = 180^\circ \quad ; \quad 4m\angle 1 \\ = 180^\circ + 80^\circ \quad ; \quad 1m\angle 1 = 65^\circ$$

c) $1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 65^\circ$

(c) en (b)

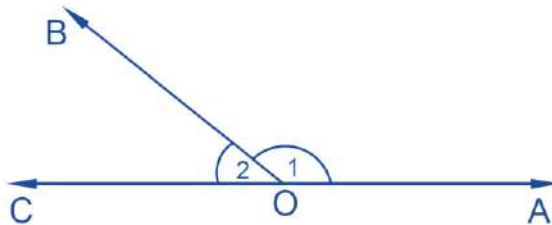
$$1m\angle 2 = 3(65^\circ) - 80^\circ \quad ; \quad 1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 115^\circ$$

$$\begin{array}{l} * \quad \mathbf{1m\angle 1 = 65^\circ} \quad ; \quad * \quad \mathbf{1m\angle 2 = 1m\angle BOC} \\ \quad \quad \quad \mathbf{= 115^\circ} \quad \mathbf{LQQD.} \end{array}$$

Ejercicio 2.3.

Considere la figura 2.3. La medida de uno de los ángulos de un par de suplementarios es el doble de la medida del otro menos 27° . Encontrar la medida de cada ángulo.

Figura 2.3



Solución:

a) $1m\angle AOB + 1m\angle BOC = 180^\circ$ por suplementarios

a) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^\circ$

b) $1m\angle 1 = 2m\angle 2 - 27^\circ$ por hipótesis

(b) en (a')

$$m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^\circ \quad ; \quad 2m\angle 2 - 27^\circ + 1m\angle 2 = 180^\circ$$

c) * $1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 69^\circ$ *LQQD.*

(c) en (b)

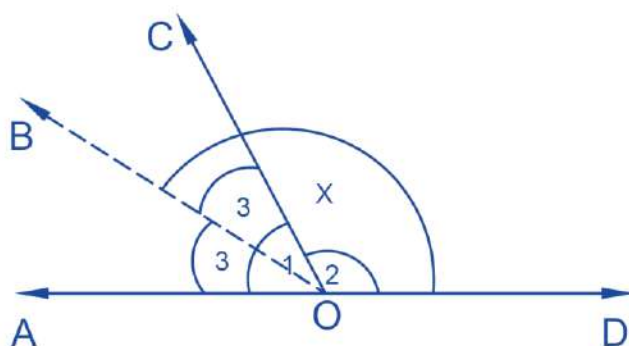
$$1m\angle 1 + 69^\circ = 180^\circ \quad ;$$

* $1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 111^\circ$ *LQQD.*

Ejercicio 2.4. *////*

Considere la figura 2.4. Dos ángulos adyacentes suplementarios están en la razón de 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la bisectriz del ángulo menor con el lado no común.

Figura 2.4



Solución:

a) $1m\angle AOC + 1m\angle COD$

$= 2\angle \text{Rectos}$ *por ser ángulos suplementarios*

a) $1m\angle + 1m\angle 2$

$= 180^\circ$: $\overline{OB}$ *Bi sec t riz del $\angle AOC$*

$$b) \quad \frac{1m\angle 1}{1m\angle 2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1m\angle 1 + 1m\angle 2}{1m\angle 2} = \frac{2+3}{3} \quad \text{por propiedad de las proporciones}$$

$$\frac{180^\circ}{1m\angle 2} = \frac{5}{3} \quad ; \quad 1m\angle 2 = \frac{(180^\circ)(3)}{5} = 108^\circ$$

$$c) \quad 1m\angle 2 = 1m\angle COD = 108^\circ$$

(c) en (a')

$$1m\angle 1 = 180^\circ - 108^\circ \quad ; \quad 1m\angle 1 = 72^\circ$$

$$d) \quad 1m\angle 1 = 1m\angle AOC = 72^\circ$$

$$1m\angle BOA = 1m\angle 3$$

$$= \frac{1m\angle AOC}{2} \quad \text{por la propiedad de la bisectriz de un ángulo.}$$

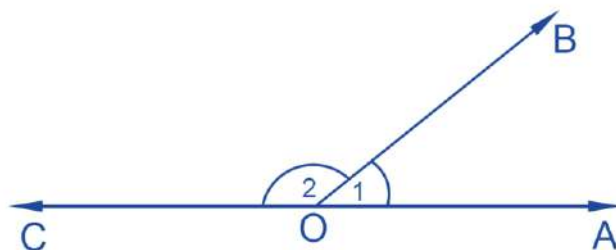
$$1m\angle 3 = \frac{1m\angle 1}{2} = \frac{72^\circ}{2}$$

$$* \quad 1m\angle 3 = 36^\circ = 1m\angle BOA = 1m\angle BOC \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 2.5. ///

Considere la figura 2.5. Calcular el valor de dos ángulos suplementarios, de modo que, si al quíntuplo del menor se le disminuye la mitad del mayor, se obtiene el triple del menor aumentado en 10° .

Figura 2.5



Solución:

$$a) \quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC$$

$= 2\angle \text{Rectos}$ por ángulos suplementarios

$$a') \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^0$$

$$b) \quad 5m\angle 1 - \frac{1m\angle 2}{2} = 3m\angle 1 + 10^0$$

$$c) \quad 1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2$$

(c) en (b)

$$5(180^0 - 1m\angle 2) - \frac{1m\angle 2}{2} = 3(180^0 - 1m\angle 2) + 10^0$$

$$900^0 - 5m\angle 2 - \frac{m\angle 2}{2} = 540^0 - 3m\angle 2 + 10^0$$

$$* \quad 1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 140^0 \quad \text{LQQD.}$$

(1m $\angle 2$) en (a')

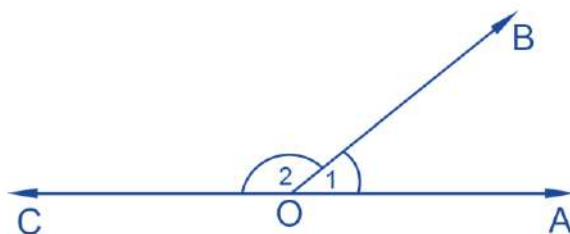
$$1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2 \quad ; \quad 1m\angle 1 = 180^0 - 140^0$$

$$* \quad 1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 40^0 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 2.6. ///

Considere la figura 2.6. Uno de los ángulos suplementarios es los $\frac{3}{5}$ del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Figura 2.6



Solución:

$$a) \quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC$$

$$= 2 \angle \text{Rectos} \quad \text{por ángulos suplementarios}$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^\circ \quad :$$

$$= 180^\circ - 1m\angle 2 \quad (a')$$

$$b) \quad 1m\angle 1 = \frac{3}{5}m\angle 2$$

$$(a') = (b)$$

$$(180^\circ - 1m\angle 2)(5) = 3m\angle 2 \quad ; \quad 900^\circ$$

$$= 8m\angle 2 \quad :$$

$$c) \quad * \quad 1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 112.5^\circ \quad LQQD.$$

$$(c) \text{ en } (a')$$

$$1m\angle 1 = 180^\circ - 1m\angle 2 \quad ; \quad 1m\angle 1 = 180^\circ - 112.5^\circ$$

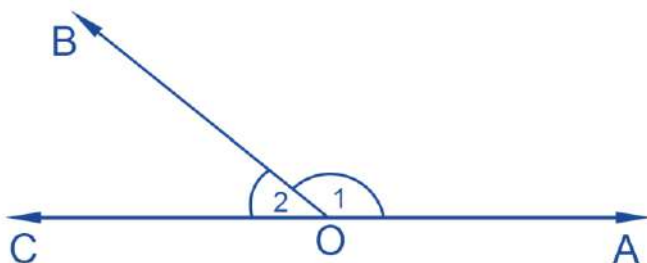
$$1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 67.5^\circ \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle 1 = 1m\angle AOB$$

$$= 67.5^\circ \quad LQQD$$

Ejercicio 2.7.

Considere la figura 2.7. De dos ángulos suplementarios, los $\frac{2}{3}$ de uno de ellos más la sexta parte del otro forman un ángulo recto. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Figura 2.7



Solución:

$$a) \quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC = 2\angle \text{Rectos} \quad \text{por ser suplementarios}$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^0 \Rightarrow 1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2 \quad (a')$$

$$b) \quad \frac{2}{3}m\angle 1 + \frac{1}{6}m\angle 2 = 90^0 \quad \text{por hipótesis}$$

(a') en (b)

$$\frac{2}{3}(180^0 - 1m\angle 2) + \frac{1}{6}m\angle 2 = 90^0$$

$$\therefore 120^0 - \frac{2}{3}m\angle 2 + \frac{1}{6}m\angle 2 = 90^0$$

$$c) \quad * \quad 1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 60^0 \quad LQQD.$$

(c) en (a')

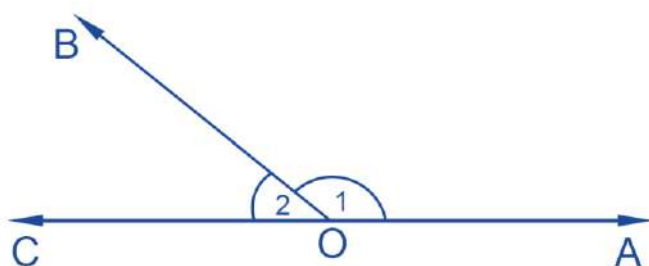
$$1m\angle 1 = 180^0 - 60^0 = 120^0$$

$$* \quad 1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 120^0 \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.8.

Considere la figura 2.8. Dos veces la medida de un ángulo es 36° menos que 5 veces la medida de su complemento. ¿Cuál es la medida del ángulo?

Figura 2.8



Solución:

$$a) \quad 1m\angle AOB + 1m\angle BOC$$

$$= 2\angle \text{Rectos} \quad \text{por ser ángulos suplementarios}$$

$$a *) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^0$$

$$b) \quad 1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2$$

$$c) \quad 2m\angle 1 + 36^0 = 5m\angle 2$$

$$(b) \text{ en } (c)$$

$$2(180^0 - 1m\angle 2) + 36^0 = 5m\angle 2$$

$$360^0 - 2m\angle 2 + 36^0 = 5m\angle 2$$

$$360^0 + 36^0 = 7m\angle 2 \quad ; \quad 396^0 = 7m\angle 2$$

$$d) \quad * \quad 1m\angle 2 = 1m\angle BOC = 56.57^0 \quad LQQD.$$

$$(d) \text{ en } (b)$$

$$1m\angle 1 = 180^0 - 1m\angle 2$$

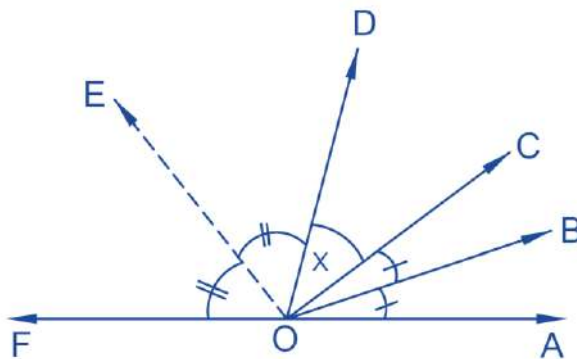
$$1m\angle 1 = 180^0 - 56.57^0$$

$$* \quad 1m\angle 1 = 1m\angle AOB = 123.43^0 \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.9.

Dada la figura 2.9. Determine la medida del ángulo X sabiendo que $1m\angle EOB = 100^0 = 1m\angle 3$, y que $1m\angle FOA = \text{ángulo llano}$.

Figura 2.9



$$H) 1m\angle EOB = 100^0 = 1m\angle 3$$

$$1m\angle FOA = \text{ángulo llano}$$

$$T) 1m\angle x = ?$$

Solución:

$$a) 2m\angle 1 + 1m\angle x + 2m\angle 2$$

$$= 2\angle Rectos \quad \text{por suma de ángulos consecutivos}$$

$$b) 1m\angle 2 + 1m\angle x + 1m\angle 1 = 100^0 = 1m\angle 3$$

$$b *) 1m\angle 2 = 100^0 - 1m\angle 1 - 1m\angle x$$

$$(b') \text{ en } (a)$$

$$c) 2(100^0 - 1m\angle 1 - 1m\angle x) + 1m\angle x + 2m\angle 1 = 100^0$$

$$d) 200^0 - 2m\angle 1 - 2m\angle x + 1m\angle x + 2m\angle 1 = 180^0$$

$$200^0 - 180^0 = 1m\angle x \quad * \quad 1m\angle x = 1m\angle DOC$$

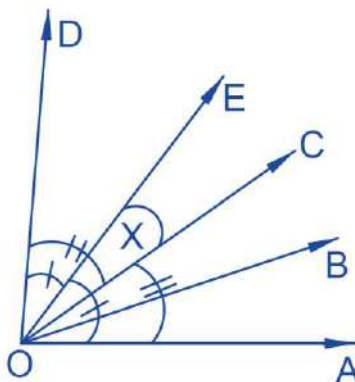
$$= 20^0 \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.10. ///

Dada la figura 2.10. Determine la medida del ángulo X sabiendo que

$1m\angle EOB = 100^0 = 1m\angle 3$, y que $1m\angle FOA = \text{ángulo llano}$.

Figura 2.10



$$H) \quad 1m\angle AOE = 1m\angle EOB = 1m\angle 2$$

$$1m\angle AOD = 1m\angle DOC = 1m\angle 1$$

$$1m\angle AOC - 1m\angle AOB = 20^0$$

$$T) \quad 1m\angle x = ?$$

Solución:

$$a) \quad 1m\angle AOC - 1m\angle AOB = 20^0 \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad 1m\angle AOC = 1m\angle AOD + 1m\angle DOC$$

$$1m\angle AOC = 1m\angle 1 + 1m\angle 1$$

$$c) \quad 1m\angle AOC = 2m\angle 1$$

$$d) \quad 1m\angle AOB = 1m\angle AOE + 1m\angle EOB \quad ; \quad 1m\angle AOB \\ = 1m\angle 2 + 1m\angle 2$$

$$e) \quad 1m\angle AOB = 2m\angle 2$$

$$(c) , (e) \text{ en } (a)$$

$$2m\angle 1 - 2m\angle 2 = 20^0$$

$$f) \quad 1m\angle 1 = 1m\angle x + 1m\angle 2 = 1m\angle AOD$$

$$2(1m\angle x + 1m\angle 2) - 2m\angle 2 = 20^0 \quad ; \quad 2m\angle x + 2m\angle 2 - 2m\angle 2 \\ = 20^0$$

$$* \quad 1m\angle x = 1m\angle EOD = 10^0 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 2.11.

Dada la figura 2.11. Determine la medida del ángulo X sabiendo que:

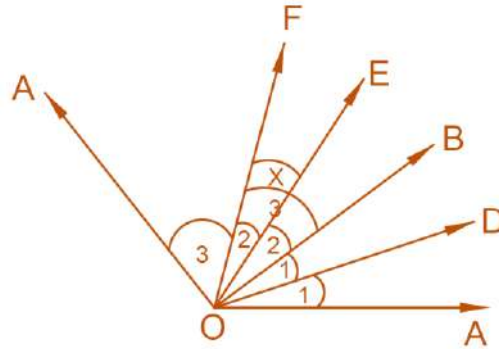
$$H) \quad 1m\angle FOB = 1m\angle AOF = 1m\angle 3$$

$$1m\angle FOD = 20^0$$

$$1m\angle BOC - 1m\angle AOB = 40^0$$

$$T) \quad 1m\angle EOF = 1m\angle x$$

Figura 2.11



Solución:

a) $1m\angle BOC - 1m\angle AOB = 40^\circ$ *por hipótesis*

b) $2m\angle 1 - 2m\angle 3 = 40^\circ$

c) $2m\angle 2 + 1m\angle 1 = 80^\circ = 1m\angle FOD$

d) $\Rightarrow 1m\angle 3 = 2m\angle 2$

e) $1m\angle 2 = 1m\angle x$

(d) en (a)

$$2m\angle 1 - 2(2m\angle 2) = 40^\circ$$

f) $2m\angle 1 - 4m\angle 2 = 40^\circ$

(e) en (f)

g) $2m\angle 1 - 4m\angle x = 40^\circ$

(e) en (c)

$$2m\angle x + 1m\angle 1 = 80^\circ$$

h) $1m\angle 1 = 80^\circ - 2m\angle x$

(h) en (g)

$$2m\angle 1 - 4m\angle x = 40^\circ \quad ; \quad 2(80^\circ - 2m\angle x) - 4m\angle x = 40^\circ$$

$$160^{\circ} - 4m\angle x - 4m\angle x = 40^{\circ} \quad ; \quad 120^{\circ} = 8m\angle x$$

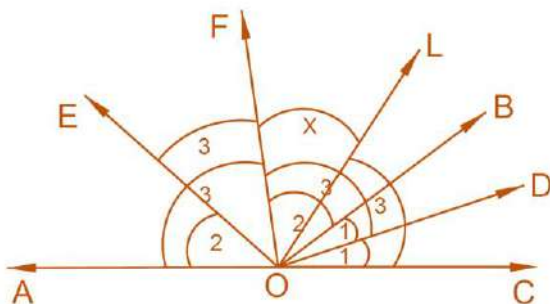
$$* \quad 1m\angle x = 1m\angle 2 = 1m\angle BOF = 15^{\circ} \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.12.

Dada la figura 2.12. Determine la medida del ángulo X sabiendo que:

- H) $1m\angle DOC = 1m\angle DOB = 1m\angle 1$
 $1m\angle BOE = 1m\angle EOA = 1m\angle 2$
 $1m\angle AOF = 1m\angle FOD = 1m\angle 3$
T) $1m\angle FOL = 1m\angle x$

Figura 2.12



Solución:

- a) $1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4$
 $= 180$ *por suma de ángulos consecutivos*
- b) $\overrightarrow{DO}$ *Bi sector iz* $\angle BOC$ *por hipótesis gráfica*
- c) $\overrightarrow{EO}$ *Bi sector iz* $\angle AOB$ *por hipótesis gráfica*
- d) $1m\angle EOD = 90^{\circ}$
 $= 1m\angle 1 + 1m\angle 2$ *por la bisectriz de ángulos adyacentes*

$$e) \quad 1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4 = 180^\circ$$

$$f) \quad 1m\angle 3 = 180^\circ - 1m\angle x - 1m\angle 4$$

(f) en (e)

$$1m\angle 3 - 1m\angle x + 1m\angle 4 = 90^\circ = 1m\angle EOD$$

$$(180^\circ - 1m\angle x - 1m\angle 4) - 1m\angle x + 1m\angle 4 = 90^\circ$$

$$180^\circ - 2m\angle x - 1m\angle 4 + 1m\angle 4 = 90^\circ$$

$$* \quad 1m\angle x = 1m\angle FOL = 45^\circ \quad LQQD.$$

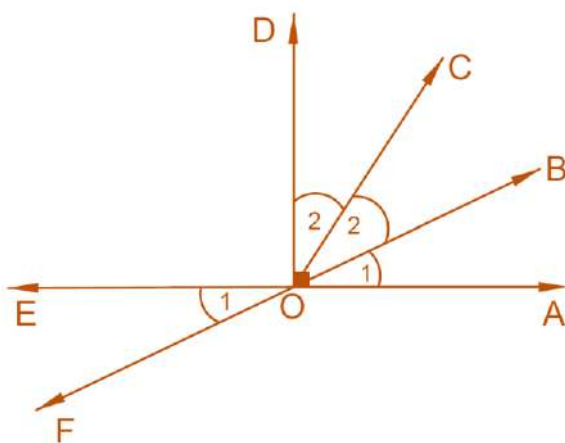
Ejercicio 2.13. ///

Dada la figura 2.13. Determine la medida del ángulo 1 sabiendo que:

$$H) \quad \frac{1m\angle AOC}{1m\angle COF} = \frac{11}{29}$$

$$T) \quad 1m\angle 1 = ?$$

Figura 2.13



Solución:

a) $1m\angle AOC = 1m\angle 1 + 1m\angle 2$ *por hipótesis*

b) $1m\angle COF = 1m\angle 2 + 90^\circ + 1m\angle 1$ *por hipótesis*

c) $2m\angle 2 + 1m\angle 1 = 90^\circ$; $1m\angle 1 = 90^\circ - 2m\angle 2$ (c *)

d) $\frac{1m\angle AOC}{1m\angle COF} = \frac{11}{29}$ *por hipótesis*

(a) , (b) (c *) en (d)

$$\frac{1m\angle 1 + 1m\angle 2}{1m\angle 2 + 1m\angle 1 + 90^\circ} = \frac{11}{29}$$

$$\frac{90^\circ - 2m\angle 2 + 1m\angle 2}{1m\angle 2 + 90^\circ - 2m\angle 2 + 90^\circ} = \frac{11}{29} \quad ; \quad \frac{90^\circ - 1m\angle 2}{180^\circ - 1m\angle 2} = \frac{11}{29}$$

e) $2610^\circ - 29m\angle 2 = 1980^\circ - 11m\angle 2$

$$18m\angle 2 = 630^\circ$$

f) $1m\angle 2 = 1m\angle COB = 1m\angle DOC = 35^\circ$

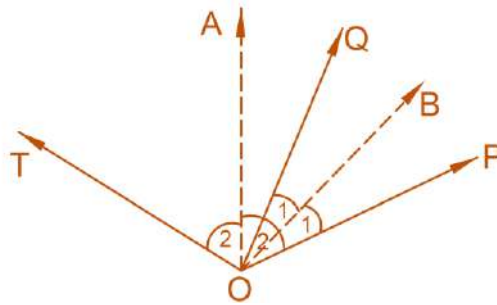
(f) en (c *)

$$1m\angle 1 = 90^\circ + 2m\angle 2 \quad * \quad 1m\angle 1 = 1m\angle AOB$$

$$= 1m\angle EOF = 20^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.14.

Se tiene los rayos OP, OQ y OT de la figura 3.14. El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos POT y POQ disminuido en $\frac{3}{4}$ del suplemento de un ángulo X es igual a 44° , si la diferencia entre los ángulos POT y POQ es igual a 20° , determine la medida del ángulo X.

Figura 2.14

H) $\overrightarrow{OB}$ Bisectriz del $\angle POQ$

$\overrightarrow{OA}$ Bisectriz del $\angle POT$

T) $1m\angle x = ?$

Solución:

a) $1m\angle AOB - \frac{3}{4}(180^\circ - 1m\angle x) = 4^\circ$ por hipótesis (a)

b) $1m\angle 3 - \frac{3}{4}(180^\circ - 1m\angle x) = 4^\circ$

c) $1m\angle POT - 1m\angle POQ = 20^\circ$ por hipótesis(b)

c) $(2m\angle 2 - 2m\angle 1 = 20^\circ) \div 2$ (b')

d) $1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 10^\circ$ (b'')

$$e) \quad 1m\angle AOP = 1m\angle 2 = 1m\angle 3 + 1m\angle 1$$

$$f) \quad 1m\angle 3 = 1m\angle 2 - 1m\angle 1 \quad \text{por resta de ángulos}$$

(d) en (f)

$$h) \quad 1m\angle 3 = 1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 10^0 \quad ; \quad 1m\angle 3 = 10^0 \quad (h*)$$

(h*) en (b)

$$1m\angle 3 - \frac{3}{4}(180^0 - 1m\angle x) = 4^0 \quad ; \quad 10^0 - \frac{3}{4}(180^0 - 1m\angle x) = 4^0$$

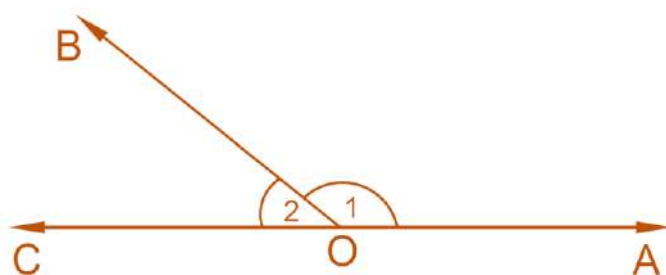
$$40^0 - 540^0 + 3m\angle x = 500^0 + 16^0$$

$$* \quad 1m\angle x = 172^0 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 2.15. ///

Si la medida de un ángulo es 58^0 menor que el triple de la medida de su suplemento, ¿Cuáles son las medidas de los ángulos? Considere la figura 2.15.

Figura 2.15



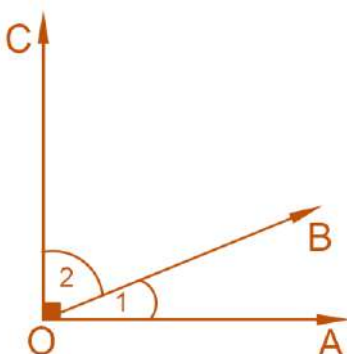
Solución:

- a) $1m\angle 1 = 3m\angle 2 - 58^\circ$ por hipótesis
- b) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle \text{Rectos}$ suplementarios por hipótesis
(a)en(b)
- c) $(3m\angle 2 - 58^\circ) + 1m\angle 2 = 180^\circ$
 $4m\angle 2 - 58^\circ = 180^\circ$
 $1m\angle 2 = \frac{180^\circ + 58^\circ}{4}$
- c') * $1m\angle 2 = 59.5^\circ$ LQQD.
(c')en(a)
- d) $1m\angle 1 = 3(59.5^\circ) - 58^\circ$
 $1m\angle 1 = 178.5^\circ - 58^\circ$
 * $1m\angle 1 = 120.5^\circ$ LQQD.

Ejercicio 2.16. ///

Si la medida de un ángulo es $\sqrt{3}$ veces la medida de su complemento, ¿Cuáles son las medidas de los ángulos? Considere la figura 3.16.

Figura 2.16



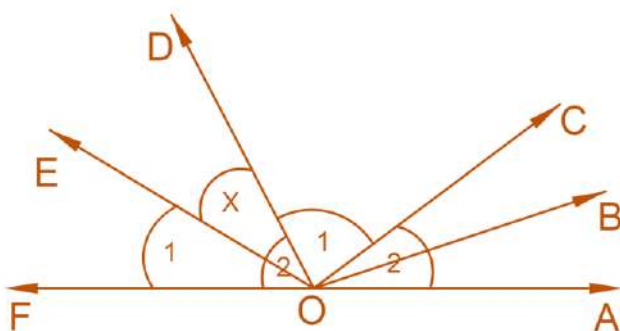
Solución:

- a) $1m\angle 1 = \sqrt{3}(1m\angle 2)$ por hipótesis
- b) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle \text{Recto} = 90^\circ$ por ángulos complementarios
- (a) en (b)
- c) $(\sqrt{3})(1m\angle 2) + 1m\angle 2 = 90^\circ$
 $(1m\angle 2)(\sqrt{3} + 1) = 90^\circ$
 $1m\angle 2 = \frac{90^\circ}{\sqrt{3} + 1}$
- d) * $1m\angle 2 = 32.95^\circ$ LQQD.
- (d) en (a)
- d) $1m\angle 1 = \sqrt{3}(32.95^\circ)$
 * $1m\angle 1 = 57.05^\circ$ LQQD.

Ejercicio 2.17. ///

Dada la figura 3.17, calcule la medida del ángulo X sabiendo que el ángulo 2 mide 70° .

Figura 2.17



H) $1m\angle 2 = 70^\circ$

T) $1m\angle x = ?$

Solución:

$$a) \quad 1m\angle\hat{2} = 70^\circ \text{ por hipótesis}$$

$$b) \quad 1m\angle 2 + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle \text{Rectos}$$

$$= 180^\circ \text{ por suma de ángulos consecutivos}$$

$$1m\angle 1 + 2m\angle 2 = 180^\circ$$

$$c) \quad 1m\hat{1} = 180 - 2m\angle 2$$

$$(a) \text{ en } (c)$$

$$1m\angle 1 = 180^\circ - 2(70^\circ)$$

$$1m\angle 1 = 180^\circ - 140^\circ \quad : \quad 1m\angle 1 = 40^\circ$$

$$d) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle \text{Rectos}$$

$$= 180^\circ \text{ suma de ángulos consecutivos}$$

$$1m\angle x + 2m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^\circ$$

$$e) \quad 1m\angle x = 180^\circ - 2m\angle 1 + 1m\angle 2$$

$$(c) \text{ y } (a) \text{ en } (e)$$

$$1m\angle x = 180^\circ - 2(40^\circ) - 70^\circ$$

$$1m\angle x = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ \quad : \quad * 1m\angle x = 30^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.18. ///

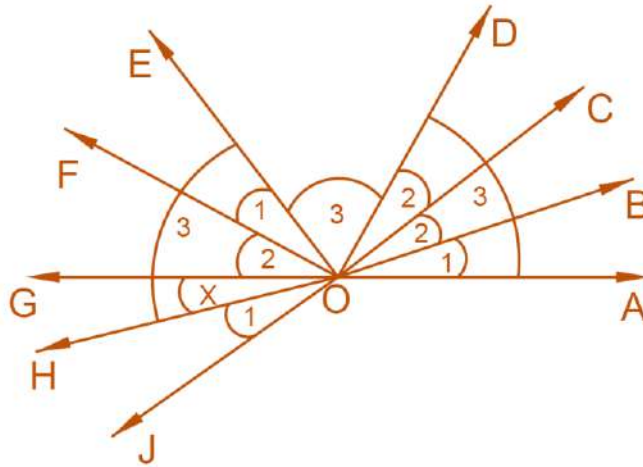
Dada la figura 2.18, calcule la medida del ángulo X sabiendo que:

$$H) \quad 1m\angle 1 = 20^\circ$$

$$1m\angle 4 = 60^\circ$$

$$T) \quad 1m\angle x = ?$$

Figura 2.18



Solución:

$$a) \quad 1m\angle 3 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 2\angle Rectos \\ = 180^\circ \text{ suma de ángulos}$$

$$b) \quad 1m\angle 3 = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 \quad \text{por hipótesis}$$

(b) en (a)

$$c) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 2 + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 1 + 1m\angle 2 \\ = 2\angle Rectos = 180^\circ$$

$$d) \quad 3m\angle 1 + 4m\angle 2 = 180^\circ$$

$$3(20^\circ) + 4m\angle 2 = 180^\circ$$

$$4m\angle 2 = 120^\circ$$

$$e) \quad 1m\angle 2 = 30^\circ$$

$$f) \quad 1m\angle 4 = 1m\angle BOD = 2m\angle 2 = 60^\circ$$

$$g) \quad 1m\angle EOH = 1m\angle 4 = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle x = 60^\circ$$

$$1m\angle x = 60^\circ - 20^\circ - 30^\circ$$

$$* \quad 1m\angle x = 10^\circ \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 2.19. ///

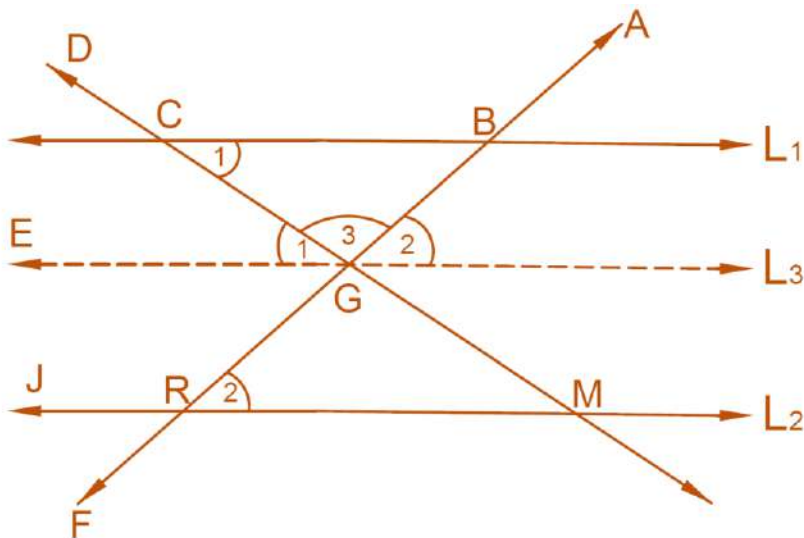
Dada la figura 2.19, calcule la medida del ángulo 3 sabiendo que:

H) $1m\angle 1 = 40^\circ$

$1m\angle 2 = 60^\circ$

T) $1m\angle 3 = ?$

Figura 2.19



Solución:

a) $L_1 \parallel L_2$ por hipótesis gráfica

b) $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ por construcción

c) $1m\angle 1 = 1m\angle CGE = 40^\circ$ por ángulos alternos internos

d) $1m\angle BGL_3 = 1m\angle 2 = 60^\circ$ por ángulos correspondientes

e) $1m\angle CGE + 1m\angle 3 + 1m\angle BGL_3$
 $= 2\angle Rectos$ por suma de ángulos consecutivos

$$40^\circ + 1m\angle 3 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$f) \quad 1m\angle 3 = 180^\circ - 100^\circ \quad * \quad 1m\angle 3 = 80^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.20.

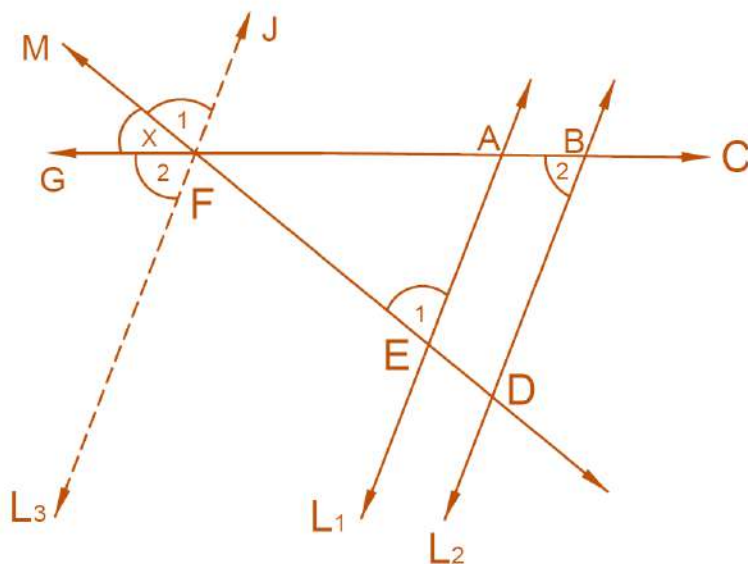
Dada la figura 3.20, calcule la medida del ángulo X sabiendo que:

$$H) \quad 1m\angle 1 = 60^\circ$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 130^\circ$$

$$T) \quad 1m\angle x = ?$$

Figura 2.20



Solución:

a) $L_1 \parallel L_2$ por hipótesis gráfica

b) $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ por construcción

c) $1m\angle MFJ = 1m\angle 1$ por ángulos correspondientes

d) $1m\angle GFL_3 = 1m\angle 2$ por ángulos correspondientes

e) $1m\angle MFJ + 1m\angle x + 1m\angle GFL_3 = 1\angle Recto$

$= 180^\circ$ suma de ángulos consecutivos

f) $1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 180^\circ$

g) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 130^\circ$ por hipótesis

(g) en (f)

h) $1m\angle x = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$: *

$= 50^\circ$ LQQD.

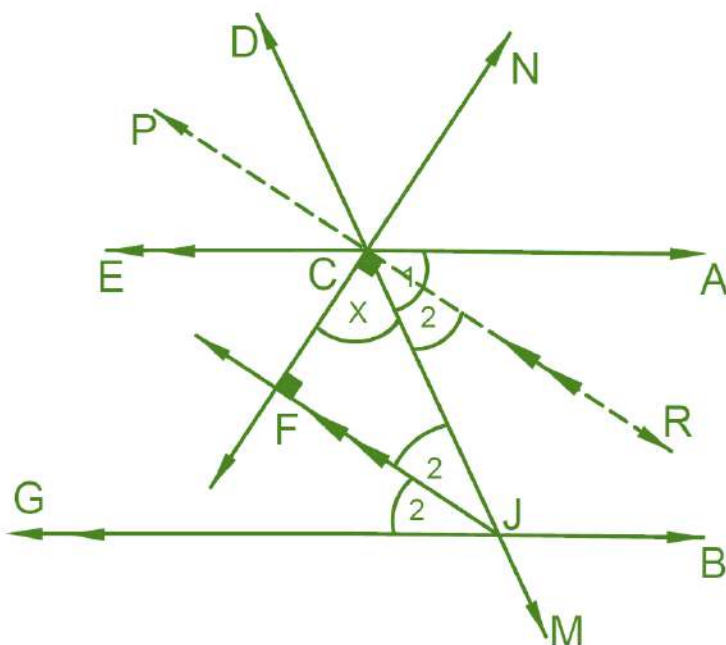
Ejercicio 2.21. ///

Dada la figura 2.21, calcule la medida del ángulo X sabiendo que:

H) $1m\angle 1 = 70^\circ$

T) $1m\angle x = ?$

Figura 2.21



Solución:

- a) $1m\angle 1 = 70^\circ$ por Hipótesis
- b) EA II GB por Hipótesis gráfica
- c) $1m\angle ACJ = 1m\angle CJG$ por ángulos alternos internos
- d) $1m\angle CJG = 2m\angle 2$
- e) $1m\angle ACJ = 1m\angle 1$
- (d), (e) en (c)
- $$2m\angle 2 = 1m\angle 1$$
- f) $1m\angle 2 = \frac{1m\angle 1}{2} = \frac{70^\circ}{2} : 1m\angle 2 = 35^\circ$
- g) PR II FJ por construcción

- g') $1m\angle FJC = 1m\angle JCR$ por ángulos alternos internos
- h) $1m\angle NCR = 1\angle \text{ecto} = 90^\circ$ por hipótesis gráfica
- i) $1m\angle RCF = 1\angle \text{Recto} = 90^\circ$ por construcción
- j) $1m\angle 1 = 1m\angle x + 1m\angle RCM = 1m\angle x + 1m\angle 2 = 90^\circ$
- k) $1m\angle x = 90^\circ - 1m\angle 2 = 90^\circ - 35^\circ \Rightarrow * 1m\angle x = 55^\circ \text{ LQQD.}$

Ejercicio 2.22. ///

Si el complemento del suplemento de un ángulo más el suplemento del complemento de su ángulo doble es igual al doble del suplemento del ángulo menos un ángulo llano. Encontrar la medida del ángulo.

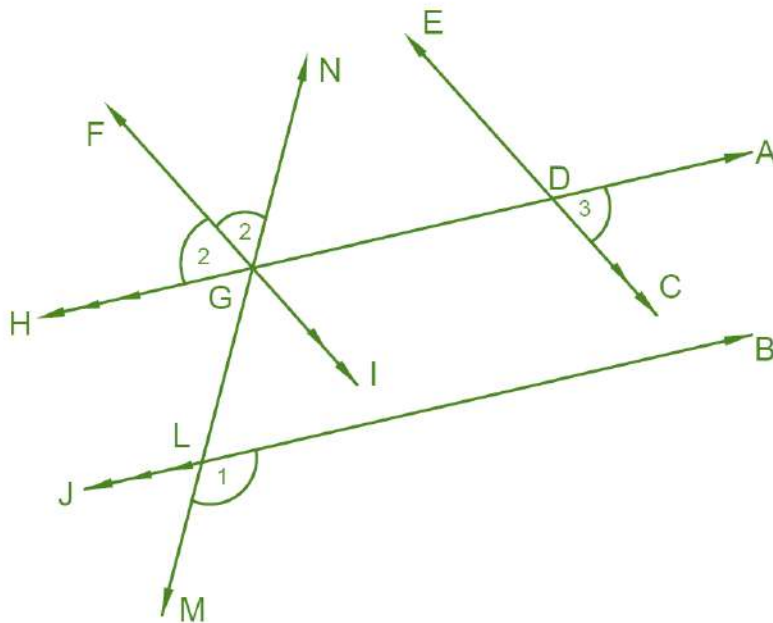
Solución:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & [90^\circ - (180^\circ - 1m\angle x)] + [180^\circ - (90^\circ - 2m\angle x)] \\
 & = [(2)(180^\circ - 1m\angle x) - 180^\circ] \text{ por hipótesis} \\
 & 90^\circ - 180^\circ + 1m\angle x + 180^\circ - 90^\circ + 2m\angle x = 360^\circ - 2m\angle x - 180^\circ \\
 & 5m\angle x = 360^\circ - 180^\circ \\
 & 5m\angle x = 180^\circ \\
 & * \quad 1m\angle x = 36^\circ \text{ LQQD.}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.23. Considere la figura 2.22. Calcule la medida del ángulo 3 sabiendo que:

- H) $1m\angle 1 = 100^\circ$
- T) $1m\angle 3 = ?$

Figura 2.22



Solución:

- a) $1m\angle BLM = 1m\angle 1$ por hipótesis
- b) $JB \parallel AH$ por hipótesis gráfica
- c) $1m\angle NGH = 2m\angle 2$
- d) $1m\angle 1 = 1m\angle AGL$ por ángulos correspondientes
- (d) = (c) por ser opuestos por el vértice
- $1m\angle 1 = 2m\angle 2$
- e) $1m\angle 2 = \frac{1m\angle 1}{2} = \frac{100^\circ}{2} \quad 1m\angle 2 = 50^\circ$
- f) $IF \parallel EC$ por hipótesis gráfica
- h) $1m\angle EGH = 1m\angle EDG = 1m\angle 2$ por ángulos correspondientes

i) $1m\angle EDG$

$= 1m\angle ADC$ *por ángulos opuestos por el vértice*

$1m\angle 2 = 1m\angle 3 = 50^\circ$

* $1m\angle 3 = 50^\circ$ *LQD.*

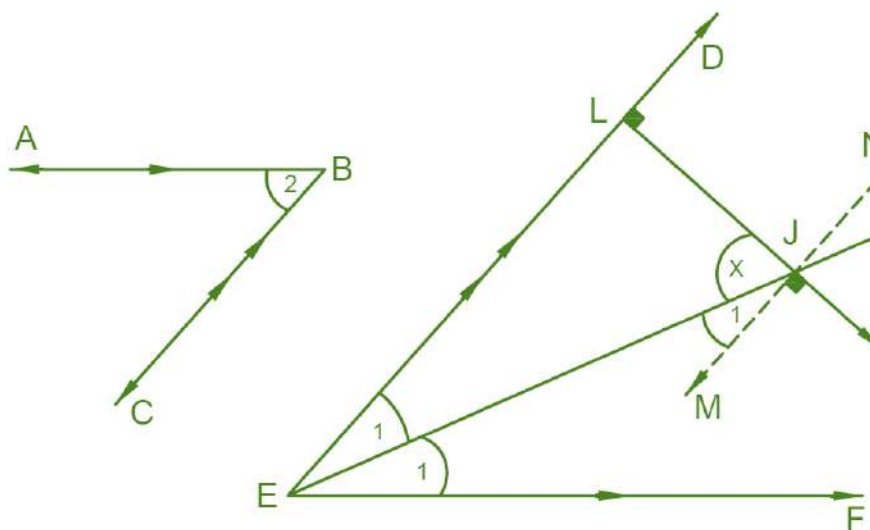
Ejercicio 2.24. *////*

Considere la figura 2.23. Calcule la medida del ángulo 3 sabiendo que:

H) $1m\angle 2 = 50^\circ$

T) $1m\angle x = ?$

Figura 2.23



Solución:

a) $AB \parallel EF$ *por hipótesis gráfica*

b) $BC \parallel ED$ *por hipótesis gráfica*

- c) $1m\angle 2 = 2m\angle 1$ *ángulos de lados paralelos entre sí*
- d) $1m\angle 1 = \frac{1m\angle 2}{2} = \frac{50}{2}$ $1m\angle 1 = 25^\circ$
- e) $MN \parallel ED$ *por construcción*
- f) $1m\angle LJN = 1\angle Recto = 90^\circ$
- h) $1m\angle LEJ = 1m\angle EJM = 1m\angle 1$ *por ángulos alternos internos*
- i) $1m\angle EJM + 1m\angle x = 90^\circ$ *por ángulos complementarios*
- j) $25^\circ + 1m\angle x = 90^\circ$ * $1m\angle x = 65^\circ$ **LQQD.**

Ejercicio 2.25.

Considere la figura 2.24. Calcule la medida de los ángulos 1 y 2, sabiendo que:

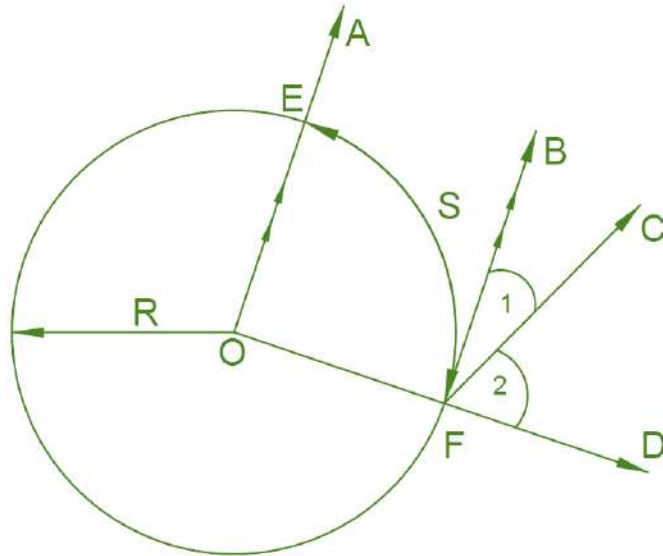
H) $S = \frac{3}{2}R$

$1m\angle 2 = 2m\angle 1$

T) $1m\angle 1 = ? (^\circ)$

$1m\angle 2 = ? (^\circ)$

Figura 2.25



Solución:

- a) Con un perímetro de la circunferencia ($2\pi R$),
 existe un ángulo central (360°),
 por lo que, con un arco (S) existirá un ángulo central ($1m\angle EOF$)
 $2\pi R \rightarrow 360^\circ$

$$\frac{3}{2}R \rightarrow 1m\angle EOF \quad 1m\angle EPF = \frac{\frac{3}{2}R \times 360^\circ}{2\pi R}$$

- b) $1m\angle EOF = 85.94^\circ$
 c) $OA \parallel FB$ por hipótesis gráfica
 d) $1m\angle EOF = 1m\angle BFD$ por ángulos correspondientes
 e) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle BFD$ por suma de ángulos consecutivos
 (e) = (d)
 f) $1m\angle EOF = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle BFD$

$$g) \quad 1m\angle EOF = 1m\angle 1 + 2m\angle 1 = 3m\angle 1 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 1 \\ = \frac{1m\angle EOF}{3} = \frac{85,94^\circ}{3}$$

$$h) \quad * \quad 1m\angle 1 = 28.64^\circ \quad LQQD.$$

(h) en (hipótesis)

$$1m\angle 2 = 2(1m\angle 1) = 2(28.64^\circ) \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle 2 \\ = 57.28^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.26. ///

La suma del complemento de un ángulo con el suplemento de su ángulo doble es mayor que 110° al tercio del ángulo. Hallar la medida del ángulo.

Solución:

$$a) \quad (90^\circ - 1m\angle x) + (180^\circ - 2m\angle x) \\ = \frac{1m\angle x}{3} + 110^\circ \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad 90^\circ - 1m\angle x + 180^\circ - 2m\angle x = \frac{1m\angle x}{3} + 110^\circ$$

$$-3m\angle x - \frac{1m\angle x}{3} = 110^\circ - 270^\circ$$

$$\frac{-9m\angle x - 1m\angle x}{3} = -160^\circ$$

$$10m\angle x = 480^\circ$$

$$* \quad 1m\angle x = 48^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.27.

La suma del complemento de un ángulo α con el suplemento de su ángulo doble, es igual a $\frac{3}{2}$ del complemento de un ángulo β . Calcular el complemento del ángulo α si $1m\angle\alpha - 1m\beta = \frac{3\pi}{20}$

Solución:

$$a) \quad (90^\circ - 1m\angle\alpha) + (180^\circ - 2m\angle\alpha)$$

$$= \frac{3}{2}(90^\circ - 1m\angle\beta) \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad (2)(90^\circ - 1m\angle\alpha + 180^\circ - 2m\angle\alpha) = 270^\circ - 3m\angle\beta$$

$$c) \quad 540^\circ - 6m\angle\alpha = 270^\circ - 3m\angle\beta \quad \rightarrow \quad 1m\angle\beta$$

$$= 2m\angle\alpha - 90^\circ \quad (c *)$$

$$b) \quad 1m\angle\alpha - 1m\angle\beta = \frac{3\pi}{20} = 27^\circ \quad \text{por hipótesis}$$

$$e) \quad 1m\angle\beta = 1m\angle\alpha - 27^\circ$$

$$(c *) = (e)$$

$$f) \quad 2m\angle\alpha - 90^\circ = 1m\angle\alpha - 27^\circ \quad \rightarrow \quad 1m\angle\alpha = 90^\circ - 27^\circ$$

$$g) \quad * \quad 1m\angle\alpha = 63^\circ$$

Para el complemento del ángulo α

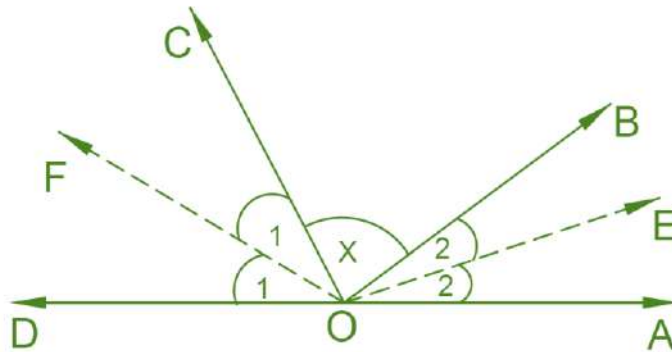
$$h) \quad 1m\angle\theta + 1m\angle\alpha = 90^\circ$$

$$1m\theta = 90^\circ - 63^\circ \quad \rightarrow \quad * \quad 1m\angle\theta = 27^\circ \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 2.28.

En un ángulo llano AOC se trazan los ángulos adyacentes AOB, BOC y COD. Si las bisectrices de los ángulos AOB y COD forman un ángulo de 130° , hallar la medida del ángulo BOC. Considere la figura 3.25.

Figura 2.28



Solución:

a) $1m\angle FOE = 130^\circ$ por hipótesis

b) $2m\angle 1 + 1m\angle BOC + 2m\angle 2 = 2\angle \text{Rectos}$
 $= 180^\circ$ suma de ángulos consecutivos

c) $1m\angle FOE = 1m\angle 1 + 1m\angle BOC + 1m\angle 2 = 130^\circ$

d) $1m\angle 1 + 1m\angle EOE + 1m\angle 2 = 180^\circ$
 $1m\angle 1 + 130^\circ + 1m\angle 2 = 180^\circ$

e) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 50^\circ$

(e) en (c)

$$50^\circ + 1m\angle BOC$$

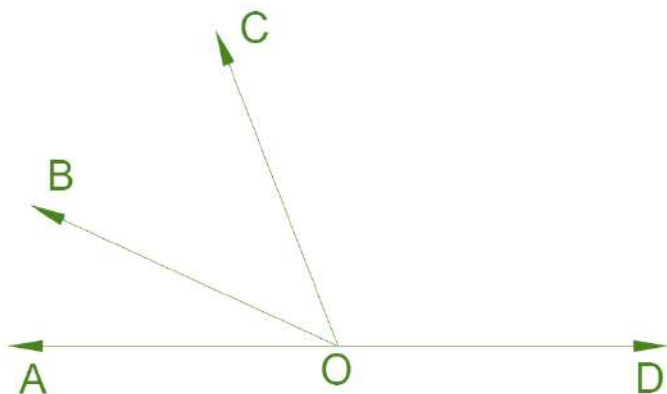
$$= 130^\circ \quad : \quad * \quad 1m\angle BOC$$

$$= 80^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 2.29.

Dos ángulos adyacentes suplementarios están en la razón de 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la bisectriz del ángulo menor con el lado no común. Considere la figura 3.26.

Figura 2.29



Solución:

$$\begin{aligned} a) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 &= 2\angle \text{Rectos} \\ &= 180^\circ \quad \text{por ángulos suplementarios} \end{aligned}$$

$$b) \quad \frac{1m\angle 1}{1m\angle 2} = \frac{2}{3} \quad \text{por hipótesis}$$

$$c) \quad 3m\angle 1 = 2m\angle 2 \quad \rightarrow \quad 1m\angle 1 = \frac{2m\angle 2}{3} \quad (c *)$$

(c *) en (a)

$$d) \quad \frac{2m\angle 2}{3} + 1m\angle 2 = 180^\circ \quad \rightarrow \quad 5m\angle 2 = (180)(3)$$

$$e) \quad 1m\angle 2 = 108^\circ$$

(e) en (c *)

$$f) \quad 1m\angle 1 = \frac{2m\angle 2}{3} = \frac{(2)(108^\circ)}{3} = 72^\circ$$

g) *OB bisectriz del ángulo AOC*

$$h) \quad 1m\angle 1 = 2m\angle 3 \quad \text{propiedad de la bisectriz}$$

$$i) \quad 1m\angle 3 = 36^\circ$$

$$j) \quad 1m\angle x = 1m\angle 2 + 1m\angle 3$$

$$1m\angle x = 108 + 36 \quad * \quad \mathbf{1m\angle x = 144^\circ \quad LQQD.}$$

Ejercicio 2.30.

Los $\frac{4}{7}$ de un ángulo menos la cuarta parte de su suplemento, dan su suplemento aumentado en 300 rad. ¿Cuánto mide el ángulo?

Solución:

$$a) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 180^\circ \quad \text{por hipótesis}$$

$$a') \quad 1m\angle 1 = 180^\circ - 1m\angle 2$$

$$b) \quad \frac{4}{7}(1m\angle 1) - \frac{1m\angle 2}{2} = 1m\angle 2 + 30^\circ$$

(a') en (b)

$$c) \quad \frac{720^\circ - 4m\angle 2}{7} - \frac{1m\angle 2}{4} - 1m\angle 2 = 30^\circ$$

$$\therefore \quad 2880^\circ - 16m\angle 2 - 7m\angle 2 - 28m\angle 2 = 840^\circ$$

$$d) \quad 51m\angle 2 = 2040^\circ \quad \therefore \quad 1m\angle 2 = 40^\circ$$

$$a') \quad 1m\angle 1 = 180^\circ - 40^\circ \quad \therefore \quad 1m\angle 1 = 180^\circ - 40^\circ$$

$$* \quad \mathbf{1m\angle 1 = 140^\circ \quad LQQD.}$$



CAPÍTULO 3

Polígonos



Capítulo 3

Polígonos

*“La geometría tiene dos grandes tesoros:
uno es el teorema de Pitágoras, y el otro el número áureo.
El primero puede compararse a una medida de oro,
y el segundo a una piedra preciosa.”*

— Johannes Kepler

Objetivo

Desarrollar en los lectores la capacidad de analizar, pensar y resolver casos que involucren el conocimiento geométrico aplicado a los polígonos, reconociendo los tipos de polígonos y aplicando sus teoremas para la resolución de ejercicios.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Identificar cada uno de los polígonos con sus respectivas propiedades.
- Demostrar los teoremas relacionados sobre polígonos.
- Realizar ejercicios de aplicación sobre polígonos.

3.1 Introducción teórica

Se llama polígono a la parte del plano limitada por una línea poligonal cerrada (cuando el primer extremo del primer segmento coincide con el segundo extremo del último segmento) formada por tres o más segmentos no colineales.

Teoremas

- La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. A este teorema se le conoce como el teorema básico de los polígonos o el teorema fundamental del triángulo designado como (T. F. Δ).
- La suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera es igual a dos ángulos rectos multiplicado por el número de triángulos en que se descompone el polígono.
- El valor de un sólo ángulo interior de un polígono convexo regular es igual a la suma de los ángulos internos del polígono dividido para el número de vértices del mismo.
- La suma de los ángulos exteriores de todo polígono convexo es igual a cuatro ángulos rectos.
- El valor de un solo ángulo exterior de un polígono convexo regular es igual a la suma de los ángulos externos del polígono dividido para el número de vértices del mismo.
- La suma de los ángulos centrales de un polígono es igual a cuatro ángulos rectos.

- El valor de un sólo ángulo central en un polígono convexo regular es igual a un ángulo externo del mismo.
- El número de diagonales “d” que pueden trazarse desde un vértice es igual al número de vértices menos tres.
- El número de diagonales totales “D” que se pueden trazar en un polígono es igual al producto del número de vértices y el número de vértices menos tres, dividido para dos.
- Dos polígonos son iguales si pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo.

3.2 Ejercicios resueltos de polígonos

Ejercicio 3.1.

Hallar el número de lados de un polígono, cuyos ángulos internos suman once veces más que sus ángulos externos.

Solución:

a) $S\angle i \text{ polígono} = 11 (S\angle e \text{ polígono})$ por hipótesis

$$2\angle R(n - 2) = 11 (4\angle R)$$

$$180^\circ(n - 2) = 11 (360^\circ)$$

$$180^\circ n - 360 = 3960^\circ$$

$$n = \frac{3960^\circ + 360^\circ}{180^\circ} \Rightarrow * \quad n = 24 \text{ lados } \textbf{LQQD}$$

Ejercicio 3.2.

La suma de los ángulos internos y externos de un polígono es 5π .
¿Cuántos lados tiene el polígono?

Solución:

$$a) \quad S_{\angle i \text{ polígono}} + S_{\angle e \text{ polígono}} = 5\pi \quad \text{por hipótesis}$$

$$2\angle R(n-2) + 4\angle R = 900^\circ$$

$$180^\circ(n-2) + 360^\circ = 900$$

$$n = \frac{900^\circ}{180^\circ} \quad \Rightarrow \quad * \quad n = 5 \text{ lados} \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 3.3.

¿Cuántos lados es el polígono que tiene 170 diagonales?

Solución:

$$a) \quad D$$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

número de diagonales totales de un polígono

$$b) \quad D = 170 \text{ diagonales} \quad \text{por hipótesis}$$

(b) en (a)

$$c) \quad 170 = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$d) \quad (170)(2) = n^2 - 3n$$

$$e) \quad n^2 - 3n - 340 = 0$$

resolviendo (e)

$$* \quad n = 20 \text{ lados} \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 3.4.

Si el número de lados de un polígono se aumenta en tres, el número de diagonales totales aumenta en 15. ¿Cuál es el polígono?

Solución:

$$a) \quad D_0 + 15 = D_1 \quad \text{por hipótesis}$$

$D_0 + 15 = \text{Número de diagonales totales del Polígono original}$

$$D_1$$

$= \text{Número de diagonales totales del Polígono aumentado tres lados}$

$$b) \quad \frac{n_0(n_0 - 3)}{2} + 15 = \frac{(n_0 + 3)(n_0 + 3 - 3)}{2} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\frac{n_0(n_0 - 3) + 30}{2} = \frac{(n_0 + 3)(n_0 + 3 - 3)}{2}$$

$$\frac{30 + n_0^2 - 3n_0}{2} = \frac{(n_0 + 3)(n_0)}{2} \quad \Rightarrow \quad (30 + n_0^2 - 3n_0) \\ = (n_0^2 + 3n_0)$$

Resolviendo:

$$* \quad n_0 = 5 \text{ lados } \text{LQQD.}$$

Ejercicio 3.5.

Hallar el número de diagonales de un polígono cuyos ángulos internos suman 5π .

Solución:

$$a) \quad S\angle i \text{ polig} = 5\pi \quad \text{por hipotesis}$$

$$2\angle R(n - 2) = 5\pi = 5(180^\circ) = 900^\circ$$

$$180^\circ n - 360^\circ = 900^\circ$$

$$n = \frac{900^\circ + 360^\circ}{180^\circ} \Rightarrow n = 7 \text{ lados}$$

$$\begin{aligned} b) \quad D &= \frac{n(n-3)}{2} && \text{diagonales totales.} \Rightarrow D \\ &= \frac{7(7-3)}{2} = \frac{7(4)}{2} \end{aligned}$$

$$* \quad D = 14 \text{ diagonales} \quad LQQD$$

Ejercicio 3.6.

¿Cuántos lados tiene un polígono que tiene el número de diagonales totales iguales a su número de lados?

Solución:

a) *Número de diagonales totales*

= *Número de lados* *por hipótesis*

$$\frac{n(n-3)}{2} = n$$

$$n^2 - 3n = 2n \Rightarrow n^2 = 5n$$

$$* \quad n = 5 \text{ lados} \quad LQQD.$$

Ejercicio 3.7.

Determinar el número de lados de un polígono que tiene 5 diagonales totales más que el polígono que tiene un lado menos.

Solución:

$$a) \quad \frac{n(n-3)}{2} = 5 + \frac{(n-1)(n-1-3)}{2} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{10 + n^2 - 5n + 4}{2}$$

$$n^2 - 3n = 10 + n^2 - 5n + 4 \quad \Rightarrow \quad 2n = 14$$

* $n = 7$ lados **LQQD.**

Ejercicio 3.8.

¿Cuántos lados tiene un polígono cuyos ángulos internos sumados, es igual a la suma de los ángulos internos y externos de otro polígono de 16 lados?

Solución:

a) $S\angle i$ Polígono 1

$= S\angle i$ Polígono 2

$+ S\angle e$ Polígono 2 *por hipótesis*

$$2\angle R(n_1 - 2) = 2\angle R(n_2 - 2) + 4\angle R$$

b) $n_2 = 16$ lados *por hipótesis*

(b) en (a)

c) $180^\circ(n_1 - 2) = 180^\circ(16 - 2) + 360^\circ$

$$180^\circ n_1 - 360 = 2520^\circ + 360^\circ \quad \therefore \quad 180^\circ n_1 = 3240^\circ$$

$$n_1 = \frac{3240^\circ}{180^\circ} \quad \Rightarrow \quad * \quad n_1 = 18 \text{ lados } \mathbf{LQQD.}$$

Ejercicio 3.9.

Los lados de un polígono miden 3, 5, 6, 8 y 10 metros, respectivamente. El perímetro de un polígono semejante es 40m. Encontrar las longitudes de los lados del segundo polígono.

Solución:

a) *POLÍGONO 1*

POLÍGONO 2

$$\text{Perímetro 1} = 32m = P_1$$

$$\text{Perímetro 2} = 40m$$

$$= P_2 \quad \text{por hipótesis}$$

b) *Polígono 1*

$$L_1 = 3m \quad L_2 = 5m \quad L_3 = 6m \quad L_4 = 8m \quad L_5 = 10m$$

$$c) \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_1}{l_1} = \frac{L_2}{l_2} = \frac{L_3}{l_3} = \frac{L_4}{l_4}$$

$$= \frac{L_5}{l_5} \quad \text{condición de semejanza}$$

$$d) \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_1}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{(L_1)(P_2)}{P_1} = \frac{(3m)(40m)}{32m} \Rightarrow * l_1$$

$$= 3.75m \quad \text{LQQD}$$

$$e) \frac{P_1}{P_2} = \frac{L_2}{l_2} \Rightarrow l_2 = l_2 \frac{P_2}{P_1} = (5m)(1.25) \Rightarrow * l_2$$

$$= 6.25m \quad \text{LQQD}$$

Ejercicio 3.10.

En un polígono regular, el ángulo interno es cuatro veces mayor que su ángulo externo.

Solución:

$$a) \quad 1\angle i \text{ Polígono} = 4(1\angle e. \text{ Polígono}) \quad \text{por} \quad \text{hipótesis}$$

$$\frac{2\angle R(n-2)}{n} = 4\left(\frac{4\angle R}{n}\right)$$

$$\frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} = 4\frac{(360^\circ)}{n}$$

$$180^\circ n = 1440^\circ + 360^\circ$$

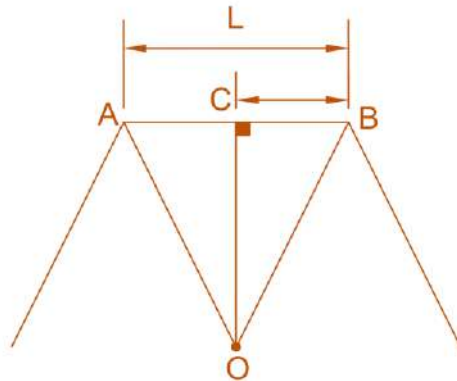
$$n = \frac{1800^\circ}{180^\circ} \quad \Rightarrow \quad * \quad n = 10 \text{ lados } LQQD.$$

Ejercicio 3.11.

Un polígono regular tiene su apotema $5\sqrt{3}$ y su lado 10 unidades.

Hallar el número de diagonales totales del polígono.

Figura 3.1



Solución:

a) $OC = 5\sqrt{3} = \text{apotema}$ *por definición*

b) $AB = 10 \text{ unidades} = \text{lado del polígono}$ *por hipótesis*

c) $\triangle OCB$ rectángulo

d) $\text{Tag } \angle BOC = \frac{CB}{OC} = \frac{\frac{AB}{2}}{\text{apotema}} = \frac{\frac{10 \text{ unidades}}{2}}{5\sqrt{3} \text{ unidades}} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = 0.57735$

$1m\angle BOC = 30^\circ$

e) $1m\angle AOB = 1m\angle \text{central del polígono} = 60^\circ$

f) $1\angle_{\text{cent.}} = \frac{4\angle R}{n}$ *por definición*

$n = \frac{360^\circ}{60^\circ} \Rightarrow n = 6 \text{ lados}$

g) $D = \frac{n(n-3)}{2}$ número de diagonales totales del polígono

$D = \frac{6(6-3)}{2} \Rightarrow * D =$

9 diagonales.

LQQD.

Ejercicio 3.12. ///

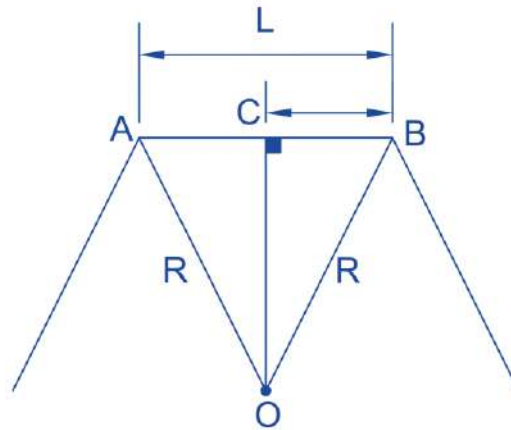
El radio de un polígono regular es de 5.54 y su apotema 5.1183 unidades.

Determinar:

- a) El valor de su lado.
- b) El valor de su ángulo central.
- c) El valor de su ángulo interno.
- d) El número total de sus diagonales.

Solución:

Figura 3.2



a) $\triangle OCB$ rectángulo

b) $OC = \text{apotema}$ por definición

c) $R^2 = OC^2 + CB^2$ teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (5.54 \text{ unid.})^2 - (5.1183 \text{ unid.})^2$$

$$\frac{L}{2} = 2.12 \text{ unid.} \quad \Rightarrow \quad * \quad L = 4.24 \text{ unid.} \quad \text{LQQD.}$$

d) Pregunta (b)

$$\cos \angle AOB = \frac{R^2 + R^2 - L^2}{2R \cdot R} \quad \text{ley de cosenos}$$

$$\cos \angle AOB = \frac{(5.54 \text{ unid.})^2 + (5.54 \text{ unid.})^2 - (4.24)^2}{2(5.54)^2}$$

$$= 0.707$$

$$* \quad 1 \quad m\angle AOB = \text{ángulo central} = 45^\circ \quad LQQD.$$

e) *Pregunta (c)*

$$1\angle_{cent.} = \frac{4\angle R}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{360^\circ}{45^\circ} \quad \Rightarrow \quad * \quad n$$

$$= 8 \text{ lados}$$

$$1\angle_{int.} = \frac{2\angle R(n-2)}{n} = \frac{180^\circ(8-2)}{8}$$

$$* \quad 1\angle_{int.} = 135^\circ \quad LQQD.$$

f) *Pregunta (d)*

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2}$$

$$* \quad D = 20 \text{ diagonales} \quad LQQD.$$

Ejercicio 3.13.

¿Cuántos lados tiene un polígono regular, si su ángulo interno es igual a su ángulo central?

Solución:

$$a) \quad 1\angle_{int.} = 1\angle_{cent.} \quad \text{por} \quad \text{hipótesis}$$

$$\frac{2\angle R(n-2)}{n} = \frac{4\angle R}{n}$$

$$180^\circ n - 360^\circ = 360^\circ$$

$$n = \frac{720^\circ}{180^\circ}$$

$$n = 4 \text{ lados} \quad LQQD.$$

Ejercicio 3.14.

La diferencia del ángulo interno y del ángulo central de un polígono regular es de 36° . Hallar el número de lados del polígono.

Solución:

$$a) \quad 1\angle_{int.} - 1\angle_{cent.} = 36^\circ \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad \frac{2\angle R(n-2)}{n} - \frac{4\angle R}{n} = 36^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{180^\circ(n-2) - 360^\circ}{n} = 36^\circ$$

$$180^\circ n - 360^\circ - 360^\circ = 36^\circ n$$

$$\therefore \quad 180^\circ n - 36^\circ n = 720^\circ$$

$$n = \frac{720^\circ}{144^\circ}$$

$$n = 5 \text{ lados} \quad \text{LQPD.}$$

Ejercicio 3.15.

La suma de los ángulos internos de un polígono Q es igual a la suma de los ángulos internos y externos de un polígono P. Calcular el número de lados de Q si P tiene 16 lados.

Solución:

Consideramos dos polígonos:

$$\begin{array}{ccc} \text{POLÍGONO Q} & \text{POLÍGONO P} & \Rightarrow n_p \\ & = 16 \text{ lados} & \end{array}$$

a) *S*¿i polígono *Q*

$$= \text{S}¿i \text{ polígono } P$$

$$+ \text{S}¿e \text{ polígono } P \quad \text{por hipótesis}$$

$$2\angle R(n_Q - 2) = 2\angle R(n_P - 2) + 4\angle R$$

$$180^\circ n_Q - 360^\circ = 180^\circ(16 - 2) + 360^\circ$$

$$n_Q = \frac{2520^\circ + 360^\circ + 360^\circ}{180^\circ}$$

$$n_Q = \mathbf{18 \text{ lados } LQQD.}$$

Ejercicio 3.16. ///

Si a un polígono regular se le aumenta un lado su ángulo interior aumenta en $\pi/15$. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Solución:

$$a) \quad \frac{2\angle R(n - 2)}{n}$$

$$= \frac{2\angle R(n - 2)}{n} + \frac{\pi}{15} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\frac{\pi}{15} = \frac{180^\circ}{15} = 12^\circ$$

$$\frac{180^\circ[(n + 1) - 2]}{(n + 1)} = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} + 12^\circ$$

$$\therefore \frac{180^\circ(n - 1)}{(n + 1)} = \frac{180^\circ n - 360^\circ + 12^\circ n}{n}$$

$$n(180^\circ n - 180^\circ) = (n + 1)(192^\circ n$$

$$- 360^\circ) \quad \text{propiedad de las proporciones}$$

$$180^\circ n^2 - 180^\circ n = 192^\circ n^2 + 192^\circ n - 360^\circ n - 360^\circ$$

$$12^\circ n^2 + 12^\circ n - 360^\circ = 0$$

$$n^2 + n - 30^\circ = 0 \quad \text{resolviendo}$$

$$* \quad n = 5 \text{ lados } LQQD.$$

Ejercicio 3.17.

El lado de un polígono regular de 12 lados mide 5 unidades. ¿Cuánto mide?:

- a) El ángulo central.
- b) El radio.
- c) El apotema.

Solución:

Pregunta .(a)

$$1\angle_{central} = \frac{4\angle R}{n} \quad \text{por definición}$$

$$1\angle_{central} = \frac{360^\circ}{12}$$

$$\Rightarrow * \quad 1\angle_{central} = 30^\circ \quad LQQD.$$

$$1m\angle POB = \frac{(1\angle_{cent.})}{2} = 15^\circ$$

Pregunta (b)

$\triangle OPB$ rectángulo

$$\text{sen } 15^\circ = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{R} \quad \therefore \quad R = \frac{2.5 \text{ unid.}}{\text{Sen } 15^\circ}$$

$$= \frac{2.5 \text{ unid.}}{0.2588}$$

$$* \quad R = 9.66 \text{ unidades } LQQD.$$

Pregunta (c)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{\left(\frac{L}{2}\right)}{\text{Apotema}} & \therefore \quad \text{Apotema} &= \frac{2.5 \text{ unid.}}{0.268} \\ &\Rightarrow \\ * \quad \text{Apotema} &= \quad 9.33 \text{ unidades} \quad \text{LQQD.} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.18.

Si el número de lados de dos polígonos regulares difieren en dos, sus ángulos centrales difieren en 15° . ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Solución:

Consideramos dos polígonos:

POLÍGONO 1 $\wedge$ POLÍGONO 2

a) Número de lados del polígono 1 $\rangle$ Número de lados del polígono 2

b) $n_1 - n_2 = 2$

c) $1\angle \text{central polígono 2} \rangle 1\angle \text{central polígono 1}$

d) $1\angle \text{central polígono 2} - 15^\circ$

$= 1\angle \text{central polígono 1} \quad \text{por hipótesis}$

$$\frac{4\angle \text{Re c tos}}{n_2} - 15^\circ = \frac{4\angle \text{Re c tos}}{n_1}$$

$$\frac{360^\circ - (15^\circ)(n_2)}{n_2} = \frac{360^\circ}{n_2 + 2}$$

d) $(n_2 + 2)(360^\circ - 15^\circ \cdot n_2) = 360^\circ \cdot n_2$

e) $n_2^2 + 2n_2 - 48 = 0$

Resolviendo la ecuación anterior

* $n_2 = 6 \text{ lados} \quad \text{LQQD.}$

b) $n_1 = n_2 + 2$

$$n_1 = 6 + 2$$

$$n_1 = 8 \text{ lados } \text{ LQQD.}$$

Ejercicio 3.19.

Si el número de lados de un polígono regular aumenta en 10, cada ángulo del nuevo polígono es 3° mayor que cada ángulo del primero. ¿Cuántos lados tiene cada polígono?

Solución:

Consideramos:

POLÍGONO 1

POLÍGONO 2

$$a) \text{ Sea } n_1 \quad \rangle \quad n_2$$

$$n_1 - 10 = n_2$$

$$b) \text{ } 1\angle \text{central polígono 1} \rangle 1\angle \text{central polígono 2}$$

$$c) \text{ } 1\angle \text{central polígono 1} - 3^\circ$$

$$= 1\angle \text{central polígono 2} \quad \text{hipótesis}$$

$$d) \quad \frac{4\angle R}{n_2} - 3^\circ = \frac{4\angle R}{n_1}$$

$$\frac{360^\circ - 3^\circ n_2}{n_2} = \frac{360^\circ}{n_2 + 10}$$

$$(n_2 + 10)(360^\circ - 3^\circ n_2) = 360^\circ n_2$$

$$360^\circ n_2 - 3^\circ n_2^2 + 3600^\circ - 30^\circ n_2 - 360^\circ n_2 = 0$$

$$3^\circ n_2^2 + 30^\circ n_2 - 3600^\circ = 0$$

Resolviendo

$$n_2^2 + 10n_2 - 1200 = 0$$

$$n_2 = 30 \text{ lados}$$

$$e) \quad n_1 = n_2 + 2 \quad : \quad n_1 = (30 + 10) \text{ lados}$$

$$n_1 = 40 \text{ lados} \quad LQQD.$$

Ejercicio 3.20.

Si la suma de los ángulos internos de dos polígonos regulares difiere en $\pi/4$ y sus ángulos centrales difieren en $\pi/24$, calcular el número de lados de cada polígono.

Solución:

Consideramos:

POLÍGONO 1 POLÍGONO 2

a) Sea n_1 } n_2

b) $S\angle i \text{ polígono } 1 - S\angle i \text{ polígono } 2 = 4\pi$ *por hipótesis*

$$2\angle R(n_1 - 2) - 2\angle R(n_2 - 2) = 4\pi$$

$$180^\circ n_1 - 360^\circ - 180^\circ n_2 + 360^\circ = 720^\circ$$

$$(180^\circ n_1 - 180^\circ n_2 = 720^\circ) \quad \div \quad \text{para } 180^\circ$$

$$n_1 - n_2 = 4$$

c) $n_1 = 4 + n_2$

d) $1\angle \text{central polígono } 2 - 1\angle \text{central polígono } 1$

$$= \frac{\pi}{24} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\frac{4\angle R}{n_2} - \frac{4\angle R}{n_1} = 7.5^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{360^\circ}{n_2} - \frac{360^\circ}{n_1}$$

$$= 7.5^\circ$$

$$360^\circ n_1 - 360 n_2 = 7.5^\circ n_1 n_2$$

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1 n_2} = \frac{7.5^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{48}$$

e) $n_1 - n_2 = \frac{1}{48} n_1 n_2$

(c) en (e)

$$(4 + n_2) - n_2 = \frac{1}{48} (4 + n_2) n_2$$

$$n_2^2 + 4n_2 - 192 = 0 \quad \text{resolviendo}$$

f) * Polígono 2 = 12 lados LQQD.

(f) en (c)

$$n_1 = 4 + n_2 \quad : \quad n_1 = 4 + 12$$

Polígono 1 = 16 lados LQQD.

Ejercicio 3.21. ///

Se tienen dos polígonos regulares P y Q, el polígono P tiene 8 lados menos que el polígono Q y, cada ángulo interno que tiene el polígono Q vale $\pi/15$ más que cada ángulo interno del polígono P. Encontrar el número de lados de cada polígono.

Solución:

POLÍGONO P $\wedge$ POLÍGONO Q por hipótesis

a) Sea: El número de lados del polígono P $\wedge$ El número de lados del polígono Q

b) $n_P - 8 = n_Q$ por hipótesis

c) $1\angle_{\text{interno}}(\text{polígono P}) \wedge 1\angle_{\text{interno}}(\text{polígono Q})$

d) $1\angle_{\text{interno}}(\text{polígono P}) - 12^\circ$

$= 1\angle_{\text{interno}}(\text{polígono Q})$ por hipótesis

$$\frac{2\angle R(n_P - 2)}{n_P} - 12^\circ = \frac{2\angle R(n_Q - 2)}{n_Q}$$

$$\frac{180^\circ n_P - 360^\circ - 12^\circ n_P}{n_P} = \frac{180^\circ (n_P - 8 - 2)}{n_P - 8}$$

$$\begin{aligned}
 (n_p - 8)(168^\circ n_p - 360^\circ) &= n_p (180^\circ n_p - 1800^\circ) \\
 168^\circ n_p^2 + 2880^\circ - 1344^\circ n_p - 360^\circ n_p &= 180^\circ n_p^2 - 1800^\circ n_p \\
 12^\circ n_p^2 - 96^\circ n_p - 2880^\circ &= 0 \\
 n_p^2 - 8n_p - 240 &= 0 \quad \text{resolviendo: } n_p \\
 &= 6 \text{ lados}
 \end{aligned}$$

e) **Polígono P = 6 lados LQQD.**

(e) en (b)

$$\begin{aligned}
 f) \quad n_Q &= n_P - 8 \quad \Rightarrow \quad n_Q = (20 - 8) \text{ lados} \\
 &\Rightarrow \quad n_Q = 12 \text{ lados}
 \end{aligned}$$

Polígono Q = 12 lados LQQD.

Ejercicio 3.22. ///

El ángulo interno y el ángulo central de dos polígonos regulares difieren en 126° y sus ángulos internos en 18° . Calcular el número de lados de cada polígono.

Solución:

Consideramos:

POLÍGONO 1 $\wedge$ POLÍGONO 2

$$\begin{aligned}
 a) \quad 1\angle \text{interno (polígono 1)} - 1\angle \text{interno (polígono 2)} \\
 &= 126^\circ \quad \text{hipótesis}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \frac{2\angle R(n_1 - 2)}{n_1} - \frac{4\angle R}{n_2} = 126^\circ$$

$$\frac{180^\circ n_1 n_2 - 360^\circ n_2 - 360^\circ n_1}{n_1 n_2} = 126^\circ$$

$$\begin{aligned}
 180^\circ n_1 n_2 - 126^\circ n_1 n_2 - 360^\circ n_1 \\
 &= 360^\circ n_2 \quad : \quad n_1(3n_2 - 20) = 20n_2
 \end{aligned}$$

$$c) \quad n_1 = \frac{20n_2}{3n_2-20}$$

d) $S\angle$ internos (polígono 1) - $S\angle$ internos (polígono 2)

$$= 18^\circ \quad \text{hipótesis}$$

$$\frac{2\angle R(n_1-2)}{n_1} - \frac{2\angle R(n_2-2)}{n_2} = 18^\circ$$

$$\frac{180^\circ n_1 n_2 - 360^\circ n_2 - 180^\circ n_2 n_1 + 360^\circ n_1}{n_1 n_2} = 18^\circ$$

$$: 20n_1 - 20^\circ n_2 = n_1 n_2$$

$$e) \quad n_1 = \frac{20n_2}{20-n_2}$$

$$(c) = (e)$$

$$\begin{aligned} \frac{20n_2}{3n_2-20} &= \frac{20n_2}{20-n_2} & : & \quad 60n_2-10n_2 \\ &= & 400n_2-20n_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad n_2^2 - 10n_2 = 0$$

* **Polígono 2 = 10 lados LQQD.**

$$\begin{aligned} e) \quad n_1 &= \frac{20(10)}{20-10} & \Rightarrow & \quad * \quad \text{Polígono 1} \\ &= 20 \text{ lados LQQD.} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.23.

En un polígono regular el perímetro es de 12cm, el radio 2cm y apotema $\sqrt{3}cm$. Calcular el perímetro y el radio de otro polígono regular de igual número de lados si su apotema es 3 cm.

Solución:

a) $Polígono 1 \approx Polígono 2$ *por hipótesis*

$$b) \quad \text{Perímetro}_1 = 12\text{cm} \quad R_1 = 2\text{cm} \quad \text{apotema } 1 \\ = \sqrt{3}\text{cm} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\text{apotema}_2 = 3\text{cm}$$

$$c) \quad \frac{\text{Perímetro } 1}{\text{Perímetro } 2} \\ = \frac{\text{apotema } 1}{\text{apotema } 2} \quad \text{por condición de semejanza}$$

$$d) \quad \text{Perímetro}_2 = \frac{(\text{apotema } 2)(\text{Perímetro } 1)}{\text{apotema } 1} = \frac{(3\text{cm})(12\text{cm})}{\sqrt{3}\text{cm}} \\ * \quad \text{Perímetro polígono } 2 = 20.78 \text{ cm} \quad \text{LQQD.}$$

$$e) \quad \frac{\text{Perímetro } 1}{\text{Perímetro } 2} \\ = \frac{\text{Radio } 1}{\text{Radio } 2} \quad \text{por condición de semejanza}$$

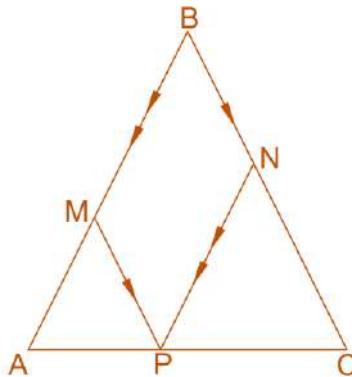
$$f) \quad \text{Radio } 2 \\ = \frac{(\text{Radio } 1)(\text{Perímetro } 2)}{\text{Perímetro}_1} = \frac{(2\text{cm})(20.78\text{cm})}{(12\text{cm})} \\ * \quad \text{Radio polígono } 2 = 3.46 \text{ cm} \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 3.24. ///

Si desde un punto cualquiera (interior) de la base de un triángulo isósceles se trazan dos rectas paralelas a los lados. Demostrar que la suma de estas paralelas es una constante.

Solución:

Figura 3.4



a) $\triangle ABC$ isósceles por hipótesis

$$AB = BC = K = \text{constante}$$

$$1m\angle BCA = 1m\angle CAB = 1m\angle 1 \quad \text{por teorema de } \triangle \text{ isósceles}$$

$$1m\angle ABC = 1m\angle 2$$

b) $NP \parallel AB$ por hipótesis

$$1m\angle BCA = 1m\angle CAB = 1m\angle MPA$$

$$= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

c) $MP \parallel BC$ por hipótesis

$$1m\angle BCA = 1m\angle MPA = 1m\angle BAC$$

$$= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

d) $\triangle ABC \approx \triangle MPA \approx \triangle NPC$ por definición

e) $MP = BN = AM$

$$f) \quad BM = NP = NC$$

$$g) \quad MP + NP = \text{suma de segmentos paralelos}$$

$$h) \quad AB = AM + BM = K \quad \Rightarrow \quad AB = MP + NP = K \quad (h')$$

$$i) \quad BC = BN + NC = K \quad \Rightarrow \quad BC = MP + NP = K \quad (i')$$

$$(h') = (i')$$

$$j) \quad AB = BC = MP + NP = K = \text{constante} \quad LQQD.$$

Ejercicio 3.25. ///

El polígono regular P tiene dos lados más que el polígono regular Q y la diferencia entre sus ángulos centrales es de 6° . Calcular el número de lados de cada polígono.

Solución:

$$a) \quad \text{Polígono } P \quad \wedge \quad \text{Polígono } Q$$

donde: El número de lados del polígono P } El número de lados del polígono Q

$$b) \quad n_P + 2 = n_Q \quad \text{por hipótesis}$$

$$c) \quad n_P - n_Q = 2$$

$$d) \quad 1\angle_{\text{central}} (\text{polígono } Q) - 1\angle_{\text{central}} (\text{polígono } P)$$

$$= 6^\circ \quad \text{por hipótesis}$$

$$\frac{4\angle_{\text{Rectos}}}{n_Q} - \frac{4\angle_{\text{Rectos}}}{n_P} = 6^\circ$$

$$\frac{(360^\circ)(n_P) - (360^\circ)(n_Q)}{(n_P)(n_Q)} = 6^\circ$$

$$e) \quad \frac{(n_Q)(n_P)}{n_P - n_Q} = 60 \quad : \quad \frac{(n_Q)(n_P)}{60} = n_P - n_Q \quad (e')$$

$$(c) = (e')$$

$$2 = \frac{(n_Q)(n_P)}{60}$$

$$120 = (n_P + 2)(n_P)$$

$$(n_P)^2 + 2(n_P) - 120 = 0$$

$$f) \quad * \quad \mathbf{n_P = 10 \text{ lados} \quad LQQD.}$$

$$b) \quad n_Q = n_P + 2 \quad \Rightarrow \quad * \quad \mathbf{n_Q = 12 \text{ Lados} \quad LQQD.}$$



CAPÍTULO 4

Triángulos



Capítulo 4

Triángulos

“La geometría de Descartes es un método para dar ecuaciones algebraicas a las curvas.”

— Voltaire

Objetivo

Definir, interpretar y aplicar los principios de semejanza y congruencia en los triángulos, con un enfoque descriptivo, con el empleo de las proposiciones y de las relaciones métricas, que permitan al lector resolver aplicaciones que involucren a todo tipo de triángulos.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Reconocer los tipos de triángulos y explicar cada uno de ellos.
- Aplicar los teoremas relacionados a los triángulos, describiendo las rectas, segmentos y puntos notables que se presentan en los triángulos.

- Realizar ejercicios de aplicación sobre triángulos aplicando los postulados de semejanza y congruencia.
- Utilizar las relaciones métricas de los triángulos rectángulos, los teoremas de Ceva, Menelao, Stewart, para desarrollar aplicaciones de triángulos.
- Identificar las propiedades de las bisectrices, baricentro, ortocentro.

4.1 Introducción teórica

Triángulo es la porción de plano limitado por tres segmentos rectilíneos que tiene dos a dos un extremo común.

Teoremas principales de triángulos

- La suma de los tres ángulos internos del triángulo es igual a dos ángulos rectos.
- Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él.
- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a cuatro ángulos rectos.
- En todo triángulo isósceles, a lados iguales se oponen ángulos iguales o viceversa.
- En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
- En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.

Rectas - segmentos y puntos notables de un triángulo

Mediana

Es el segmento trazado desde un vértice hacia el punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las tres medianas se llama **BARICENTRO**, **CENTRO DE GRAVEDAD** o **CENTROIDE**. y se representa por (G). La mediana respecto a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la hipotenusa.

Altura

Es la perpendicular trazada desde un vértice, hacia el lado opuesto o a su prolongación. El punto donde concurren las tres alturas se llama **ORTOCENTRO** se representa por "O".

Bisectriz interior de un ángulo

Es la recta que divide a un ángulo interno del triángulo en dos ángulos parciales, iguales consecuentemente en un triángulo existirán tres bisectrices internas, el punto donde concurren las tres bisectrices interiores se llama **INCENTRO** y se representa por "I".

Bisectriz exterior de un ángulo

Es la recta que corresponde a la bisectriz de un ángulo exterior, hay tres bisectrices una para cada ángulo exterior. El punto de intersección de las bisectrices exteriores determina el EX-CENTRO o EX - INCENTRO, se representa con " E ". El ex - centro es el centro de la circunferencia ex - inscrita al triángulo.

Mediatriz

Es la perpendicular trazada en el punto medio de cada lado. El punto de intersección de las tres mediatrices se llama CIRCUNCENTRO y se representa por " C ", el cual equidista de los tres vértices del mismo, y constituye el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Ceviana

Es el segmento rectilíneo que une un vértice con cualquier punto del lado opuesto.

Características de las rectas - segmentos y puntos notables en los triángulos equiláteros - isósceles - escalenos.

- En los triángulos equiláteros las rectas, segmentos notables, trazadas desde uno de los vértices, se confunden en una sola y pueden ser consideradas como, mediana, altura, bisectriz interna,

mediatriz, o ceviana. En lo que respecta a los puntos notables, así mismo, un solo punto representa el baricentro, ortocentro, incentro, circuncentro.

- En los triángulos isósceles las rectas o segmentos trazadas desde el vértice comprendido entre los dos lados iguales tienen la misma característica que el caso anterior, no así con los puntos notables que se encuentran ubicados en distinta posición.
- En los triángulos escálenos las rectas, segmentos y puntos notables se encuentran ubicados en el interior y exterior del triángulo.

Propiedades de las rectas notables

- El ángulo formado por dos bisectrices internas de un triángulo es igual a un ángulo recto más la mitad de la medida del ángulo no considerado por las bisectrices.
- El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo es igual a un ángulo recto disminuido en la mitad del ángulo interno en el tercer vértice no considerado por las bisectrices.
- El ángulo formado por dos bisectrices, una interna y otra externa de dos vértices diferentes de un triángulo, es igual a la mitad de la medida del ángulo interno correspondiente al tercer vértice no considerado por las bisectrices señaladas.
- El ángulo formado por la bisectriz interna y la altura del mismo vértice de un triángulo es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos internos en los otros vértices.

- El ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la diferencia de los ángulos agudos.

Semejanza de triángulos

Se dice que dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Postulados de semejanza de triángulos

Primer postulado. - Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, son semejantes. A esta proposición se le conoce como criterio de semejanza, **ÁNGULO-ÁNGULO**; Para que estos triángulos sean semejantes es necesario que tengan también iguales los terceros ángulos, y que los lados homólogos sean proporcionales.

Segundo postulado. - Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre estos dos lados, los triángulos son semejantes.

Tercer postulado. - Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales son semejantes.

Congruencia

Se denominan figuras congruentes a las que tienen la misma forma y el mismo tamaño, se puede decir que una es la copia exacta de la otra.

Triángulos congruentes

Son los que tienen la misma forma e igual tamaño. Si dos triángulos son congruentes, sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales. Para representar la congruencia entre triángulos se emplea el símbolo “ $\cong$ ”.

Postulados de congruencia de triángulos

- Si un triángulo tiene dos lados y el ángulo comprendido iguales a los correspondientes elementos de otro, entonces los dos triángulos son congruentes en una correspondencia, LADO - ÁNGULO – LADO (L. A. L).
- Si un triángulo tiene un lado y sus dos ángulos contiguos iguales, a los correspondientes elementos de otros entonces los dos triángulos son congruentes, en una correspondencia ÁNGULO - LADO – ÁNGULO (A. L. A.).
- Si los tres lados de un triángulo son iguales a los correspondientes lados de otro, entonces los dos triángulos son congruentes, en una correspondencia. LADO - LADO – LADO (L. L. L.).

Teorema de Pitágoras generalizado respecto a un ángulo agudo, en un triángulo cualquiera. En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Teorema de Pitágoras generalizado respecto a un ángulo obtuso, en un triángulo cualquiera. - En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Propiedad de la bisectriz interna. - En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno divide al lado opuesto en dos segmentos directamente proporcionales a los lados del triángulo que forman dicho ángulo.

Propiedad de la bisectriz externa. - En todo triángulo la bisectriz de un ángulo exterior divide al lado opuesto en dos segmentos directamente proporcionales a los lados que forman dicho ángulo.

Teorema de Stewart. - El cuadrado de la longitud del segmento que une al vértice de un triángulo con un punto interior cualquiera del lado opuesto, multiplicado por dicho lado es igual a la suma de los productos de las longitudes de los segmentos determinados multiplicado por el cuadrado de la longitud de los lados consecutivos, menos el producto de dichos segmentos por el lado en el que están contenidos.

Teorema de Menelao. - Si una transversal corta a los lados de un triángulo, determina seis segmentos, cumpliéndose que el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

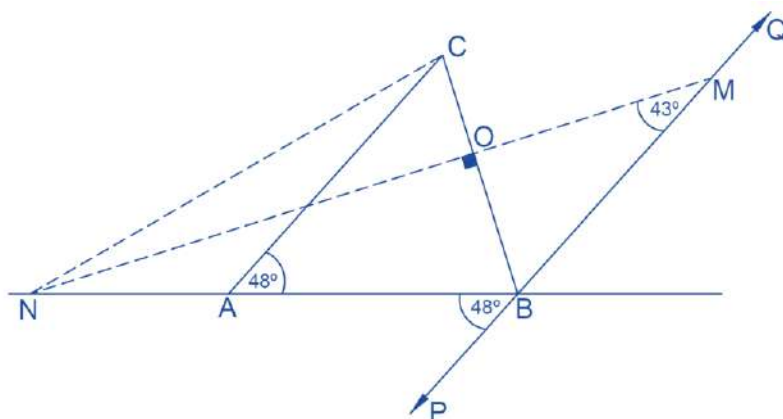
Teorema de Ceva. - Si en un triángulo se trazan rectas que unen los vértices con un mismo punto (tres ceviana); estas determinan en los lados del triángulo seis segmentos cumpliéndose que el producto de tres segmentos no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

4.2 Ejercicios resueltos de triángulos

Ejercicio 4.1.

Dado el triángulo de la figura 4.1, hallar la medida del $\angle ACN$, sabiendo que el ángulo $\angle BAC = 48^\circ$, el ángulo $\angle BMN = 43^\circ$, el segmento MN es mediatriz del segmento BC y que la recta PQ es paralela al segmento AC.

Figura 4.1



$$H) \quad 1m\angle BAC = 48^\circ$$

$$1m\angle BMN = 43^\circ$$

$MN = \text{Mediatriz } BC$

$PQ \parallel AC$

$$T) \quad 1m\angle ACN = ?$$

Solución:

$$a) \quad 1m\angle BAC = 1m\angle ABP = 48^\circ \quad \text{Por ángulos alternos internos}$$

$\triangle BOM$ Rectángulo

$$b) \quad 1m\angle OBM = 1m\angle 1 = 90^\circ - 1m\angle 3 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 1 = 47^\circ$$

$$1m\angle PBM = \text{Angulo llano} = 180^\circ$$

$$c) \quad 1m\angle PBA + 1m\angle ABC + 1m\angle CBM = 180^\circ$$

$$48^\circ + 1m\angle 2 + 1m\angle 1 = 180^\circ$$

$$\therefore \quad 48^\circ + 1m\angle 2 + 47^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad 1m\angle 2 = 85^\circ$$

$\triangle ONB$ Rectángulo

$$d) \quad 1m\angle ONB = 1m\angle 3 = 90^\circ - 1m\angle 2 \quad \text{por diferencia de ángulos}$$

$$1m\angle 3 = 90^\circ - 85^\circ \quad : \quad 1m\angle 3 = 5^\circ$$

$$e) \quad PQ \parallel AC \quad \text{por hipótesis}$$

$$f) \quad 1m\angle ACB = 1m\angle CBM \Rightarrow 1m\angle 4 = 1m\angle 1$$

$$= 47^\circ \quad \text{por alternos internos}$$

$\triangle NCO$

$$g) \quad CO = OB \quad \text{Por hipótesis}$$

$\triangle NOB$

$$1m\angle AOC \cong 1m\angle NOB = 90^\circ$$

$$ON = ON \quad \text{por lado común}$$

$$\triangle NCO \cong \triangle NOB \quad \text{por, lado - ángulo - lado}$$

$$1m\angle NCO \cong 1m\angle NBO \Rightarrow 1m\angle 2 = 85^\circ$$

$\triangle NCA$

$$1m\angle NCO - 1m\angle ACO = 1m\angle ACN$$

$$\therefore 1m\angle 2 - 1m\angle 4 = 1m\angle ACN$$

$$85^\circ - 47^\circ = 1m\angle ACN \Rightarrow * \quad 1m\angle ACN$$

$$= 38^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.2.

Dado el triángulo de la figura 4.2, hallar la medida del $\angle X$, sabiendo que el ángulo $\angle ABC = 100^\circ$, el segmento $AL = LP$ y el segmento $PM = MC$.

Figura 4.2

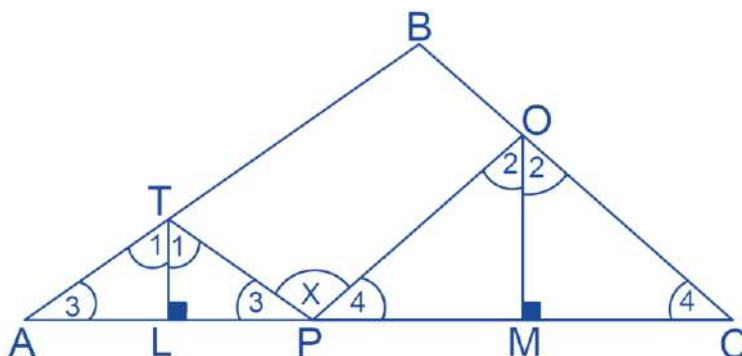


Figura 4.2

H) $1m\angle ABC = 100^\circ$

$AL = LP$

$PM = MC$

T) $1m\angle x = ?$

Solución:

a) ΔATP

$$AL = LP \quad \text{por hipótesis}$$

$$TL = \text{altura}$$

$$\Delta TPL \text{ isósceles}$$

$$AT = TP$$

b) $1m\angle TPA = 1m\angle TAP = 1m\angle 3$

$$1m\angle ATL = 1m\angle LTP = 1m\angle 1$$

$$\Delta PCN \text{ Isósceles}$$

$$\overline{PM} = \overline{MC} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\overline{MN} = \text{altura}$$

$$1m\angle NPM = 1m\angle NCP = 1m\angle 4$$

$$1m\angle PNM = 1m\angle MNC = 1m\angle 2$$

$$1m\angle LPM = 180^\circ \quad \text{Ángulo llano}$$

c) $1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4 = 180^\circ$

$$\Delta ABC$$

d) $1m\angle 3 + 100^\circ + 1m\angle 4 = 180^\circ \quad \text{Por suma de ángulos}$

$$(c) = (d)$$

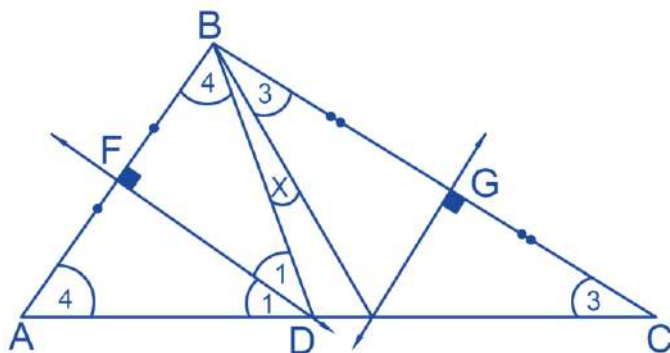
$$1m\angle 3 + 1m\angle x + 1m\angle 4 = 1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 100^\circ$$

$$* \quad \mathbf{1m\angle x = 100^\circ \quad LQQD.}$$

Ejercicio 4.3. //

Para el triángulo de la figura 4.3, hallar la medida del $\angle X$, sabiendo que el ángulo $\angle ABC = 122^\circ$.

Figura 4.3



H) $1m\angle ABC = 122^\circ$

T) $1m\angle x = ?$

Solución:

$\triangle ABC$

a) $1m\angle 4 + 122^\circ + 1m\angle 3$

$= 2\angle \text{Rectos}$ *teorema básico o fundamental del triángulo*

$$1m\angle 4 + 1m\angle \hat{3} = 58^\circ$$

b) $1m\angle ABC = 1m\angle 4 + 1m\angle x + 1m\angle 3 = 122^\circ$

(a) en (b)

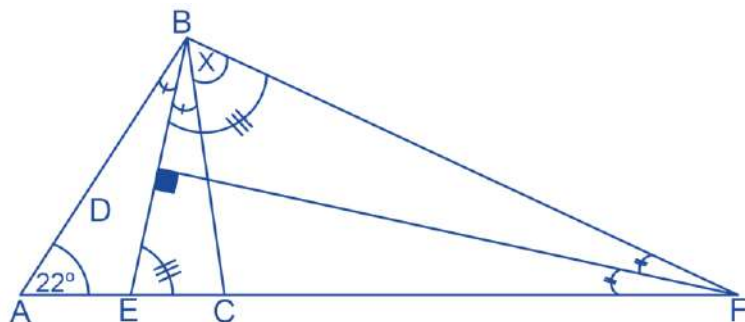
$$58^\circ + 1m\angle x = 122^\circ$$

$$* \quad 1m\angle x = 64^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.4.

Con relación al triángulo de la figura 4.4 Hallar la medida del $\angle X$ sabiendo que el ángulo $\angle ABC = 100^\circ$, el segmento $AL=LP$ y $PM=MC$.

Figura 4.4



H) $BD \cong DE$

T) $1m\angle x = ?$

Solución:

a) $BE =$ *Bi sect riz* $\angle ABC$ *por hipótesis*

b) $BD = DE$ *Por Hipot*

$\triangle BEF$

c) $DF =$ *Altura* (*lado común*)

d) $1m\angle DFE = 1m\angle DFB = 1m\angle 2$

e) $DF =$ *Bi sect* $\angle BFE$

f) $1m\angle DBF = 1m\angle DEF = 1m\angle 3$

g). $1m\angle 3 = 1m\angle 1 + 1m\angle x$

$\triangle BDF$

$$h.) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 90^\circ \quad \text{por T.F. } \Delta$$

ΔABF

$$22^\circ + 2m\angle 1 + 1m\angle x + 2m\angle 2 = 180^\circ \quad \text{por T.F. } \Delta$$

$$i.) \quad 2m\angle 1 + 2m\angle 2 + 1m\angle x = 158^\circ$$

$$(i) - (b)$$

$$d.) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 68^\circ$$

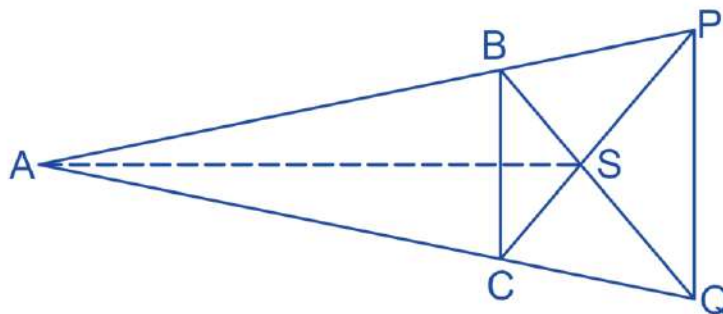
$$(d) \quad \text{en } (h)$$

$$\begin{aligned} 1m\angle 1 + 1m\angle x + 1m\angle 2 = 90^\circ & \quad : \quad 68^\circ + 1m\angle x \\ = 90^\circ & \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle x \\ = 22^\circ & \quad LQQD. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.5.

Considerando los lados de los triángulos APQ y ABC de la figura 5.5 encontrar la bisectriz del ángulo BAC.

Figura 4.5



$$H) \quad \overline{AB} = \overline{AC}$$

$$\overline{AP} = \overline{AQ}$$

$$T) \quad \overline{AS} = \text{Bisectriz } \angle BAC$$

Solución:

a) $\overline{AP} = \overline{AQ}$ por hipótesis

b) $\overline{AP} - \overline{AB} = \overline{AQ} - \overline{AC}$

$$\overline{BP} = \overline{CQ}$$

c) $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$

$$\Delta APC \wedge \Delta AQB$$

$$\overline{AP} = \overline{AQ} \quad (L)$$

$$1m\angle PAC = 1m\angle BAQ \quad (A)$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \quad (L)$$

$$\Delta APC \cong \Delta AQB \quad \text{por (lado, ángulo, lado)}$$

d) $1m\angle APC \cong 1m\angle AQB \cong 1m\angle 3$

$$\Delta APQ \text{ Isósceles}$$

$$\overline{AP} = \overline{AQ}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 1m\angle APQ &\cong 1m\angle AQP & \therefore & & 1m\angle APC + 1m\angle CPQ \\ &= 1m\angle BQA + 1m\angle BQP \end{aligned}$$

$$\text{f) } 1m\angle CPQ = 1m\angle BQP \quad \therefore \quad 1m\angle 2 = 1m\angle 1$$

$$\Delta BSC$$

$$\begin{aligned} 1m\angle SBC &= 1m\angle SCB & \Rightarrow & & \Delta BSC \text{ Isósceles} & \Rightarrow & & \overline{BS} \\ &= \overline{SC} \end{aligned}$$

$$\Delta ABS \wedge \Delta ACS$$

$$BS = SC \quad (L)$$

$$AB = AC \quad (L)$$

$$AS = AS \quad (L) \quad \text{por lado común}$$

$$\Delta ABS \cong \Delta ACS \quad \text{por: (lado, lado, lado)}$$

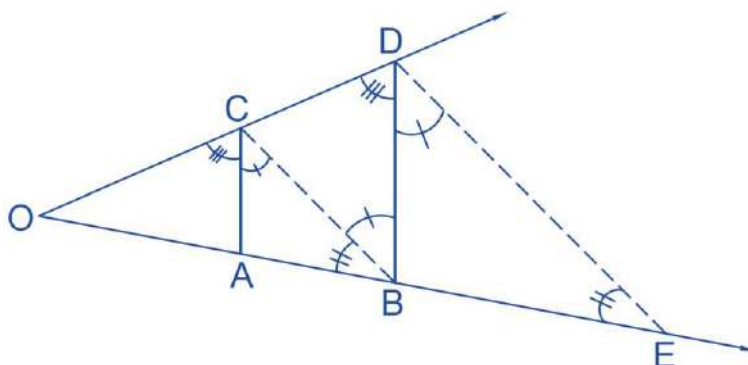
$$\Rightarrow 1m\angle BAS = 1m\angle SAC$$

* $\overline{AS}$ Es **Bisectriz** del $\angle BAC$ **LQQD.**

Ejercicio 4.6.

Dado el triángulo de la figura 4.6, demostrar $\overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OE}$, sabiendo que el ángulo $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$ y $\overline{CB} \parallel \overline{DE}$.

Figura 4.6



$$H) \quad \overline{AC} \parallel \overline{DB}$$

$$\overline{CB} \parallel \overline{DE}$$

$$T) \quad \overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OE}$$

Solución:

$$a) \quad \overline{AC} \parallel \overline{DB} \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \quad \overline{CB} \parallel \overline{DE} \quad \text{por hipótesis}$$

$$c) \quad 1m\angle OCA = 1m\angle ODB = 1m\angle 3 \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

$$d) \quad 1m\angle ACB = 1m\angle CBD$$

$$= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

$$e) \quad 1m\angle OCB = 1m\angle ODE = (1m\angle 3 + 1m\angle 1) \quad \text{por suma de ángulos}$$

$$\triangle OCB \quad \wedge \quad \triangle ODE$$

$$\overline{OC} = \overline{OA} \quad (L)$$

$$1m\angle OCB = 1m\angle ODE \quad (A)$$

$$\overline{CB} = \overline{DE} \quad (L) \quad \Rightarrow \quad \Delta OCB \approx \Delta ODE \quad (\text{lado, ángulo, lado})$$

$$f) \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DE}} \quad \text{proporción entre lados homólogos}$$

$$g) \quad \Delta OCA \wedge \Delta ODB$$

$$1m\angle OCA = 1m\angle ODB \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

$$1m\angle COA = 1m\angle DOB \quad \text{por ángulo común}$$

$$1m\angle COA = 1m\angle DBO \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

$$\Delta OCA \cong \Delta ODB \quad (\text{ángulo, ángulo, ángulo})$$

$$h) \quad \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad \text{por proporciones}$$

$$(f) = (h)$$

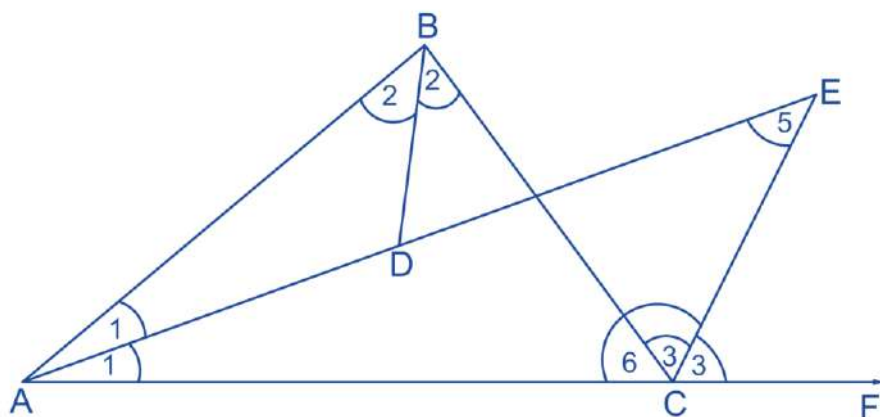
$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \quad \text{Considerando:} \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

$$* \quad \overline{OB}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OE} \quad \text{LQPD.}$$

Ejercicio 4.7.

Para el triángulo de la figura 4.7, demostrar la congruencia entre los triángulos ABD y AEC

Figura 4.7



T) $\triangle ABD \cong \triangle AEC$

Solución:

a) $\overline{BD} = \text{Bisectriz } \angle ABC$ por hipótesis

b) $\overline{AE} = \text{Bisectriz } \angle BAC$

c) $\overline{EC} = \text{Bisectriz } \angle BCF$

$\triangle AEC$

d) $1m\angle 3 = 1m\angle 1$

$+ 1m\angle 5$ por teorema de ángulo exterior al $\triangle$

e) $2m\angle 1 + 2m\angle 2$

$= 2m\angle 3$ por teorema de ángulo exterior al $\triangle$

$$f) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle 3$$

$$(d) = (f)$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 5 = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 5 = 1m\angle 2$$

ΔABD

$$g) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 4$$

$= 2\angle$ Rectos *por suma de ángulos internos del Δ*

ΔAEC

$$h) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 5 + 1m\angle 6$$

$= 2\angle$ Rectos *por suma de ángulos internos del Δ*

$$(g) = (h)$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 4 = 1m\angle 1 + 1m\angle 5 + 1m\angle 6$$

$$1m\angle 4 = 1m\angle 6$$

$\Delta ABD \wedge \Delta AEC$

$$1m\angle 1 = 1m\angle 1 \quad \text{por identidad.}$$

$$1m\angle 4 = 1m\angle 6$$

$$1m\angle 2 = 1m\angle 5$$

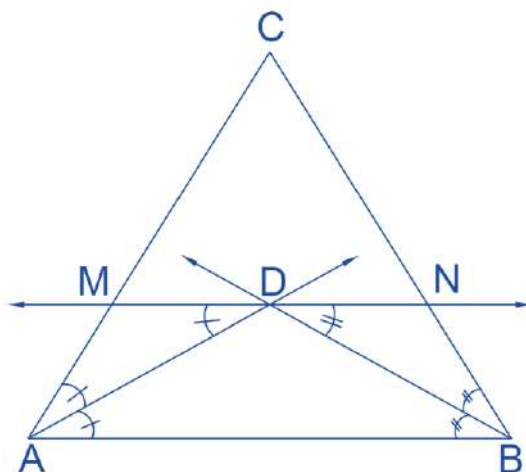
Como los ángulos internos del ΔABD son iguales a los ángulos internos del ΔAEC , entonces, los dos triángulos son semejantes.

$$* \quad \Delta ABD \approx \Delta AEC \quad LQQD. \quad \text{ángulos internos del } \Delta$$

Ejercicio 4.8. //

Dado el triángulo de la figura 4.8, demostrar $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{NB}$, si $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$

Figura 4.8



H) $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$

T) $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{NB}$

Solución:

a) $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ por hipótesis

b) $\overline{AD}, \overline{BD}$ rectas transversales

c) $\overline{AD} = \text{Bisectriz interna } \angle MAB$

d) $\overline{BD} = \text{Bisectriz interna } \angle ABN$

$$1m\angle DAB = 1m\angle MDA$$

$$= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

$$1m\angle DBA = 1m\angle NDB$$

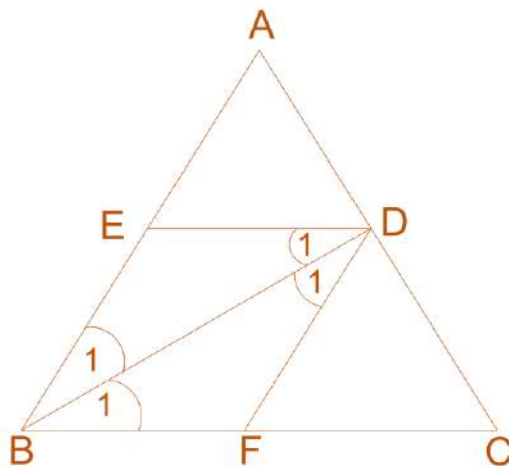
$$= 1m\angle 2 \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

- e) $\triangle MDA$ Isósceles
- f) $\overline{AM} = \overline{MD}$ por teorema de $\triangle$ isósceles
- $\triangle DNB$ Isosceles
- h) $\overline{BN} = \overline{ND}$ por teorema de $\triangle$ isósceles
- i) $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DN}$ por suma de segmentos
- (f) y (h) en (i)
- * $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{NB}$ LQQD.

Ejercicio 4.9.

Con relación a la figura 4.9, demostrar T) $\overline{ED} \cong \overline{DF}$, sabiendo que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$, $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$

Figura 4.9



H) $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$

$\overline{DF} \parallel \overline{AB}$

$\overline{BD}$ Bisectriz del $\angle ABC$

T) $\overline{ED} \cong \overline{DF}$

Solución:

a) $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ por hipótesis

b) $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ por hipótesis

$$1m\angle DBF = 1m\angle BDE$$

$$= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

c) $1m\angle EBD = 1m\angle BDF$

$$= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

$\triangle BED$ isósceles

d) $\overline{BE} = \overline{ED} \Rightarrow \triangle BED \wedge \triangle BDF$

... $1m\angle EBD = 1m\angle BDF = 1m\angle 1 \quad (A)$

$\overline{BD} = \overline{BD} \quad (L) \text{ por lado común}$

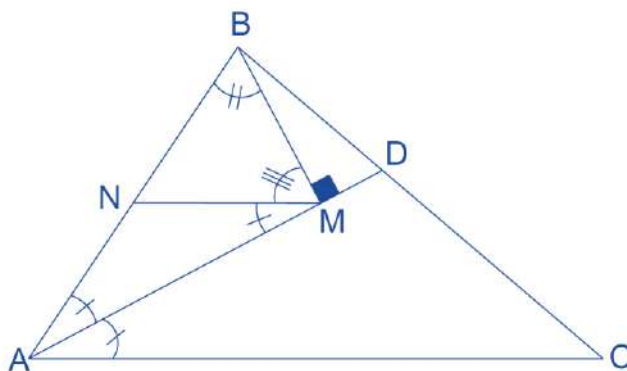
$1m\angle EDB = 1m\angle DBF \quad (A) \Rightarrow \triangle BED$

$\cong \triangle BDF \quad (A.L.A) \Rightarrow * \overline{ED} \cong \overline{DF} \quad LQQD.$

Ejercicio 4.10. ///

Dada la figura 4.10, demuestre $\overline{AN} \cong \overline{NB}$, si $\overline{MN}$ es paralelo al segmento $\overline{AC}$

Figura 4.10



$$H) \overline{MN} \parallel \overline{AC}$$

$$T) \overline{AN} \cong \overline{NB}$$

Solución:

$$a) \overline{NM} \parallel \overline{AC} \quad \text{por hipótesis}$$

$$b) \begin{aligned} 1m\angle MAC &= 1m\angle AMN \\ &= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos alternos internos} \end{aligned}$$

$$c) \Delta ANM \text{ Isósceles}$$

$$d) \overline{AN} = \overline{NM} \quad \text{por teorema de } \Delta \text{ isósceles } c *$$

$$\Delta AMB \text{ Rectángulo}$$

$$e) \begin{aligned} 1m\angle 1 + 1m\angle 2 &= 1\angle \text{Recto} \\ &= 90^0 \quad \text{por ángulos complementarios} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1m\angle AMD &= \text{Angulo llano} = 1m\angle 1 + 1m\angle 3 + 1\angle \text{Recto} \\ &= 2\angle \text{Rectos} = 180^0 \end{aligned}$$

$$f) \begin{aligned} 1m\angle 1 + 1m\angle 3 &= 1\angle \text{Recto} \\ &= 90^0 \quad \text{por ángulos complementarios} \end{aligned}$$

$$(e) = (f)$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle 1 + 1m\angle 3 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 2 = 1m\angle 3$$

$$\Delta NMB \text{ Isósceles}$$

$$g) \overline{NB} = \overline{NM}$$

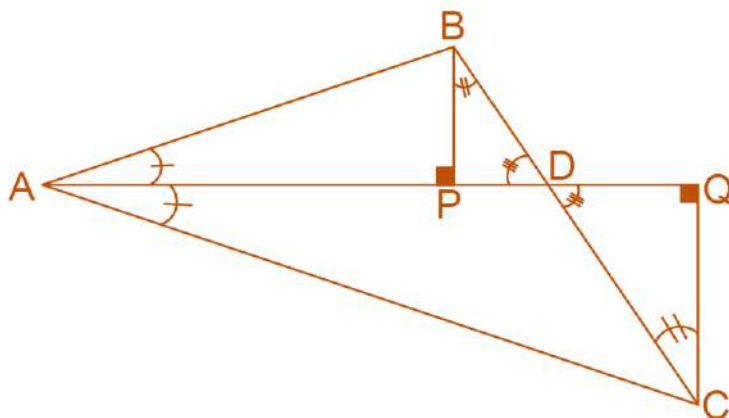
$$(d) = (g)$$

$$* \quad \overline{AN} = \overline{NB} \quad \text{LQPD.}$$

Ejercicio 4.11. //

Con los datos que se indican en la figura 4.11, demostrar $P \wedge Q$ dividen armónicamente $\overline{AD}$

Figura 4.11



T) $P \wedge Q$ Dividen armónicamente $\overline{AD}$

Solución:

a) $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}$ por definición de división armónica

b) $\overline{BP} \parallel \overline{CQ}$ por hipótesis gráfica

c) $\overline{BP} \perp \overline{AQ}$ por hipótesis gráfica

d) $\overline{CQ} \perp \overline{AD}$ por hipótesis gráfica

$$\triangle PBD \wedge \triangle DQC$$

$$e) \quad 1m\angle BPD = 1m\angle DQC = 1\angle Recto$$

$$= 90^\circ \quad \text{por hipótesis gráfica}$$

$$f) \quad 1m\angle PDB = 1m\angle QCD \quad \text{por opuestos por el vertice}$$

$$g) \quad 1m\angle PBD = 1m\angle DCQ \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

$$\Delta PBD \approx \Delta DQC \quad \text{rectángulos}$$

$$h) \quad \frac{\overline{BP}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \quad \text{proporciones entre lados homólogos}$$

$$\Delta ABP \wedge \Delta AQC \quad \text{rectángulos}$$

$$i) \quad 1m\angle BAP = 1m\angle QAC = 1m\angle 1$$

$$1m\angle APB = 1m\angle AQC = 90^\circ$$

$$1m\angle ABP = 1m\angle QCA$$

$$\Delta ABP \approx \Delta AQC$$

$$j) \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}$$

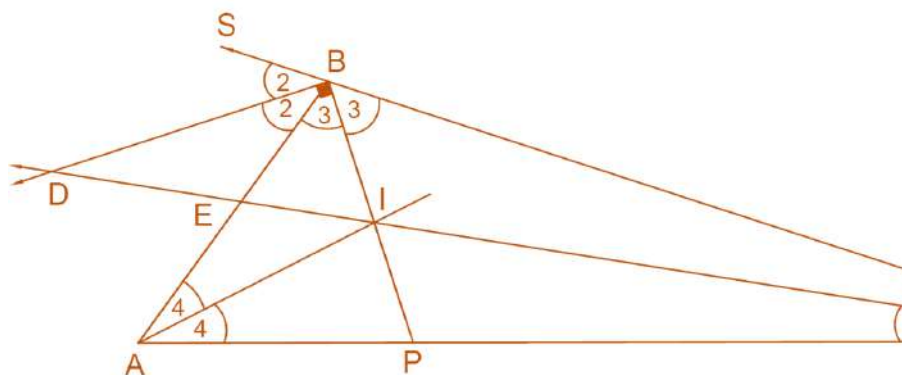
$$(h) = (j)$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}$$

$$* \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}} \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.12.

Con relación a la figura 4.12, demuestre $\overline{CD} \cdot \overline{AI} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$

Figura 4.12

T) $\overline{CD} \cdot \overline{AI} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$

Solución:

a) $\overline{AI}$ bisectriz $\angle BAC$ por construcción auxiliar

b) $1m \angle SBC = 1m \angle$ Llano $= 2 \angle$ Rectos $= 180^\circ$

c) $2m \angle 2 + 1m \angle ABI + 1m \angle IBC = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{2m \angle 2 + 1m \angle ABI + 1m \angle IBC}{2} = 90^\circ$$

d) $\frac{2m \angle 2 + 1m \angle 4 + 1m \angle 3}{2} = 90^\circ$

$$\begin{aligned}
1m\angle ABI &= 1m\angle 4 & : & & 1m\angle BAI \\
&= 1m\angle 6 & : & & 1m\angle IBC \\
&= 1m\angle 3 & : & & 1m\angle IAC = 1m\angle 5
\end{aligned}$$

$$e) \quad 1m\angle 2 + 1m\angle 4 = 1\angle \text{Recto} = 90^\circ$$

$$(d) = (e)$$

$$\frac{2m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 3}{2} = 1m\angle 2 + 1m\angle 4$$

$$\therefore 2m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 3$$

$$= 2m\angle 2 + 2m\angle 4 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 3 = 1m\angle 4$$

$\overline{BP}$ bisectriz $\angle ABC$ por hipótesis

$\overline{EC}$ bisectriz $\angle ACB$ por hipótesis

I = incentro por definición

$$1m\angle 5 = 1m\angle 6 \quad \text{por propiedad del incentro}$$

$$f) \quad 1m\angle BDC = \frac{1m\angle BAC}{2} = \frac{1m\angle 6 + 1m\angle 5}{2}$$

$$\Rightarrow \text{por propiedad de las bisectrices}$$

$$1m\angle BDC = \frac{2m\angle 6}{2} = \frac{2m\angle 5}{2} = 1m\angle 5 \quad 1m\angle BDC$$

$$= 1m\angle AEI \quad \text{opuestos por el vértice}$$

$$\triangle ABC \approx \triangle AEI$$

$$g) \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{EI}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AI}}$$

$$\triangle ABC$$

$$h) \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \quad \text{teorema de la bisectriz interna}$$

$$\triangle BEC$$

$\overline{DB}$ bi sec triz externa del $\angle SBE$

i) $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}$ teorema de la bi sec triz externa

(h) = (i)

j) $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ (k)

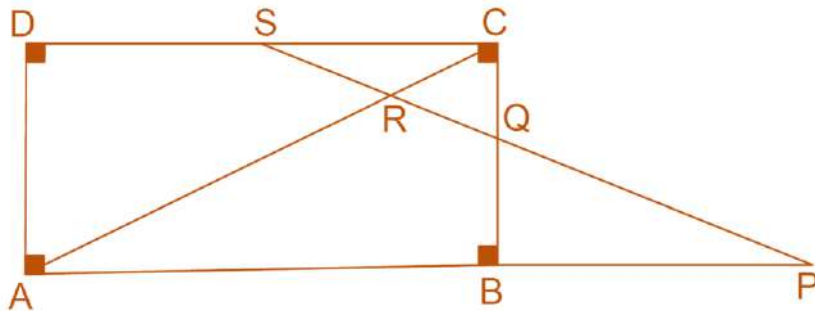
(g) = (k)

$\frac{\overline{DB}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}$ * $\overline{DC} \cdot \overline{AI} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$ LQQD

Ejercicio 4.13. ///

Considere la figura 4.13, determine $\overline{AB} = ?$, sabiendo que $\overline{AD} = 7$ unidades, $\overline{BP} = 10$ unidades, $\overline{BQ} = 4$ unidades, y $\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{2}{5}$.

Figura 4.13



H) $\overline{AD} = 7$ unidades

$\overline{BP} = 10$ unidades

$\overline{BQ} = 4$ unidades

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = \frac{2}{5}$$

T) $\overline{AB} = ?$

Solución:

$\triangle SCQ \wedge \triangle PBQ$ rectángulos

- a) $1m \angle CQS = 1m \angle PQB$ opuestos por el vértice
- b) $1m \angle SCQ = 1m \angle PBQ = 1m \angle Recto = 90^\circ$ por hipótesis gráfica
- c) $1m \angle CSQ = 1m \angle QPB$

$\triangle SCQ \simeq \triangle PBQ$ por (a), (b), (c)

d) $\frac{\overline{SC}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{SQ}}{\overline{PQ}}$ Proporción entre lados homólogos

$$\frac{\overline{SC}}{10 \text{ unid.}} = \frac{\overline{CQ}}{4 \text{ unid.}} \Rightarrow \overline{SC} = \frac{10 \text{ unid.}}{4 \text{ unid.}} \cdot \overline{CQ}$$

e) $\overline{SC} = \frac{5}{2}(\overline{AD} - \overline{BQ}) = \frac{5}{2}(7 - 4) \Rightarrow \overline{SC} = 7.5 \text{ unid.}$

$\triangle SCR \wedge \triangle PAR$

- f) $1m \angle SRC = 1m \angle ARP$ opuestos por el vértice
- g) $1m \angle SCR = 1m \angle RAP$ ángulos alternos internos
- h) $1m \angle CSR = 1m \angle RPA$

$\triangle SCR \approx \triangle PAR$ por (f), (g), (h)

i) $\frac{\overline{SC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}}$ proporción de lados homólogos

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = \frac{2}{5} \quad \text{por hipótesis}$$

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{PA}} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{PA} = \frac{7.5 \text{ unid}(5)}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{PA}$$

$$= 18.75 \text{ unidades}$$

j) $\overline{PA} = \overline{AB} + \overline{BP}$ por suma de segmentos

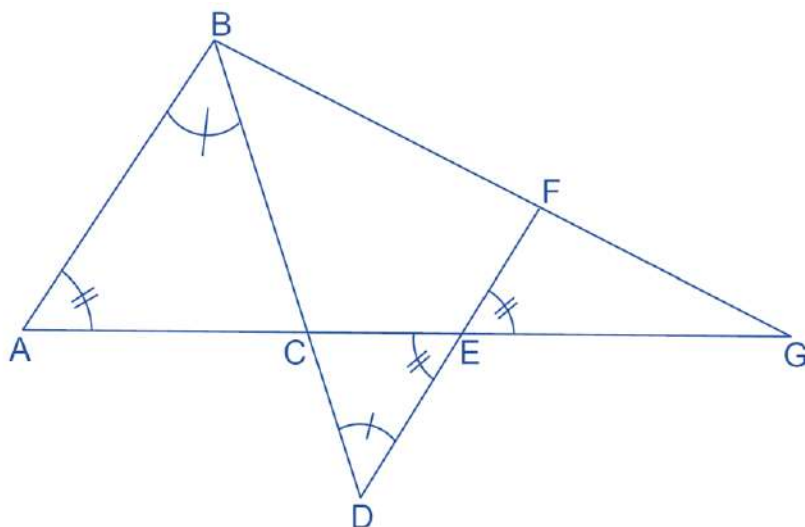
$$\overline{AB} = (18.75 - 10) \text{ unidades} \quad \Rightarrow \quad * \quad \overline{AB}$$

$$= 8.75 \text{ unidades} \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 4.14. ///

Con los datos que se presentan en la figura 4.14. Demostrar C y G dividen armónicamente a AE. Si $\triangle ABC$ escaleno, $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{EF}$

Figura 4.14



H) $\triangle ABC$ escaleno

$\overline{DF} \parallel \overline{AB}$

$\overline{DE} \parallel \overline{EF}$

T) C y G dividen armónicamente a AE

Solución:

ΔABG

a) $DF \parallel AB$ por hipótesis

b) $1m\angle ARC = 1m\angle BDE$ por ángulos internos alternos

c) $1m\angle BAC = 1m\angle AED$ " " " "

d) $1m\angle ACB = 1m\angle ECD$

$\Delta ABC \approx \Delta CED$ por (b), (c), (d)

e) $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ proporcionalidad entre lados homólogos

f) $\overline{DE} \parallel \overline{EF}$ por hipótesis

$\Delta ABG \wedge \Delta EFG$

g) $1m\angle BAG = 1m\angle FEG$ por opuestos por el vértice

h) $1m\angle AGB = 1m\angle FGE$ por ángulo común

i) $1m\angle ABG = 1m\angle AFG$ por ángulos correspondientes

$\Delta ABG \simeq \Delta EFG$ por (h), (i), (j)

j) $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{FG}}$

$= \frac{\overline{AG}}{\overline{CE}}$ proporción de lados homólogos

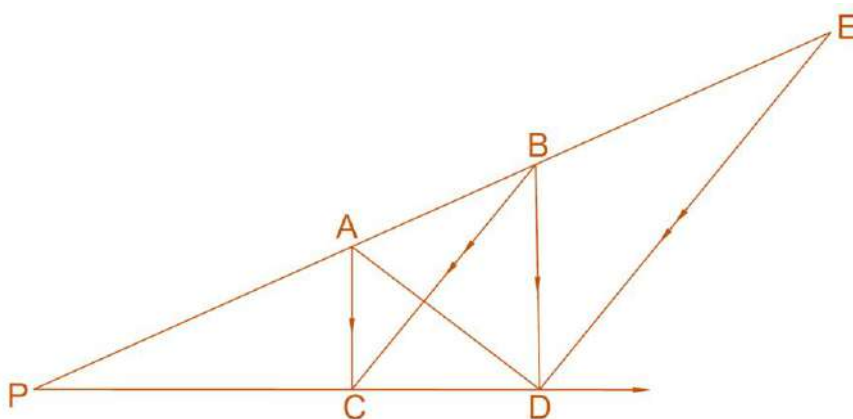
$$(e) = (j) \Rightarrow *$$

$$= \frac{\overline{AG}}{\overline{EG}} \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.15.

Dada la figura 4.15. Demostrar $\overline{PB}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PE}$

Figura 4.15



T) $\overline{PB}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PE}$

Solución:

a) $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ por hipótesis gráfica

b) $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$

$$\triangle PAC \sim \triangle PED$$

c) $1m \angle PBC = 1m \angle PED$ por ángulos correspondientes

d) $1m \angle BPC = 1m \angle EPD$ por ángulo común

$$e) \quad 1m\angle PCB$$

$$= \quad 1m\angle PDE \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta PBC \approx \Delta PED \quad \text{por (c), (d), (e)}$$

$$f) \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \quad \text{proporción entre lados homólogos}$$

$$\Delta PAC \wedge \Delta PBD$$

$$h) \quad 1m\angle APC = 1m\angle BPD \quad \text{por ángulo común}$$

$$i) \quad 1m\angle PAC = 1m\angle PBD \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

$$j) \quad 1m\angle PCA = 1m\angle PDB \quad \text{por ángulos correspondientes}$$

$$\Delta PAC \approx \Delta PBD \quad \text{por (h), (i), (j)}$$

$$k) \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \quad \text{por lados homólogos}$$

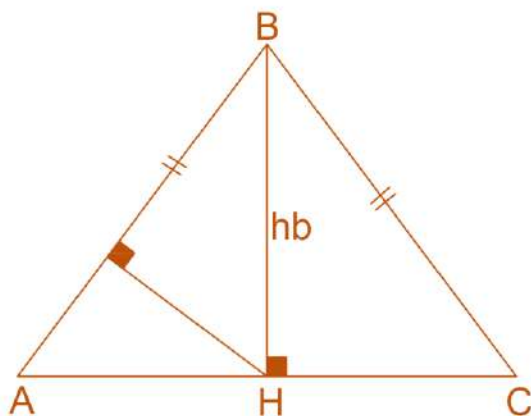
$$(f) = (k) \quad \therefore \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \quad \Rightarrow \quad * \quad \overline{PB}^2$$

$$= \overline{PA} \cdot \overline{PE} \quad \text{LQPD.}$$

Ejercicio 4.16. //

Considere la figura 4.16, determine $\overline{HD}$, sabiendo que $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{AC} = 30$ unidades y $HB = 20$ unidades.

Figura 4.16



H) $\overline{AB} = \overline{BC}$

$\overline{AC} = 30$ unidades

$HB = 20$ unidades

T) $\overline{HD} = ?$

Solución:

$\triangle ABC$

a) $\overline{AB} = \overline{BC}$ por hipótesis

b) $\overline{AH} = \overline{HC}$ por hipótesis

$\triangle ABH$ rectángulo

$$\begin{aligned} \text{c) } \overline{AB}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 && \text{por Pitágoras} && \Rightarrow && \overline{AB}^2 \\ &= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + (hb)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (225 + 400) \text{ unidades} = 625 \text{ unidades} && \Rightarrow && \overline{AB} \\ &= 25 \text{ unidades} \end{aligned}$$

$\triangle ABH \wedge \triangle ADH$ rectángulos

$$\text{d) } 1m\angle ABH$$

$$= 1m\angle DHA \quad \text{por ángulos de lados perpendiculares}$$

$$\text{e) } 1m\angle AHB = 1m\angle ADH \quad \text{por ángulos rectos}$$

$$\text{f) } 1m\angle BAH = 1m\angle DAH \quad \text{por ángulo común}$$

$$\triangle ABH \approx \triangle ADH \quad \text{por (d), (e) y (f)}$$

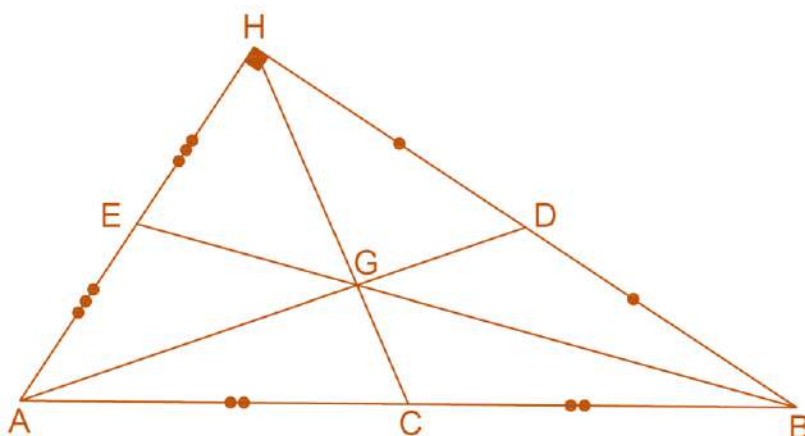
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} \quad \text{por lados homólogos}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{DH}} \quad \Rightarrow \quad \overline{DH} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{(15)(20)}{(25)}$$

$$* \quad \overline{DH} = 12 \text{ unidades} \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 4.17.

Dada la figura 4.17 determine $\overline{AB}$, conociendo que la distancia del ortocentro al baricentro en un triángulo rectángulo mide $\frac{23}{3}$ m. Calcular el valor de la hipotenusa.

Figura 4.17

H) $H = \text{ortocentro}$

$G = \text{baricentro}$

$$\overline{HG} = \frac{23}{3}$$

T) $\overline{AB} = ?$

Solución:

a) $c = \text{Punto Medio } \overline{AB}$ (hipotenusa del $\triangle ABC$)

b) $\overline{AC} = \overline{CB}$

$= \overline{HC}$ propiedad de la mediana en los triángulos rectángulos

$$c) \overline{HG} = \frac{2}{3} \overline{HC}$$

$$d) \overline{HC} = \frac{3}{2} \overline{HG} \quad \Rightarrow \quad \overline{HC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{3}$$

$$\overline{HC} = 12.5 \text{ unidades}$$

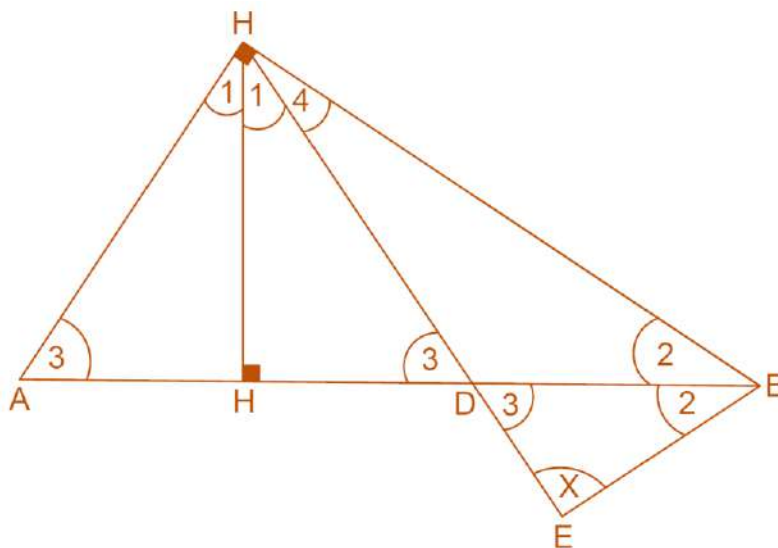
$$\overline{AB} = 2\overline{HC}$$

$$\overline{AB} = (2)(12.5 \text{ unidades}) \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 25 \text{ unidades} \quad \text{LQQD}$$

Ejercicio 4.18. //

Considerando los datos de la figura 4.18 encuentre la medida del ángulo X

Figura 4.18



$$H) \overline{BH} \cong \overline{HD}$$

$$T) 1m\angle DEC = ?$$

$$1m\angle ACD \cong 1m\angle ECD$$

Solución:

a) $\overline{BH} = \overline{HD}$ por hipótesis

b) $AH =$ altura del $\triangle BAD$ $\therefore \triangle ABD$ es isósceles

c) $\overline{AB} = \overline{AD}$

d) $1m\angle ABH = 1m\angle HDA = 1m\angle 3$ por teorema de $\triangle$ isósceles

e) $1m\angle BAH = 1m\angle HAD$

$= 1m\angle 1$ propiedad de los seg. notables en los triángulos

f) $1m\angle ECA = 2m\angle 2$ por hipótesis

g) $\triangle ABC \therefore 2m\angle 1 + 1m\angle 4 = 1\angle \text{Recto}$
 $= 90^\circ$ por el teorema básico del $\triangle$ ($TB\Delta$)

h) $\triangle ADC \therefore 1m\angle 3$

$= 1m\angle 2$

$+ 1m\angle 4$ por el teorema de ángulo exterior a un $\triangle$

i) $\triangle ADH \therefore 1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1\angle \text{Recto} = 90^\circ$ ($TB\Delta$)
(h) en (i)

j) $1m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 1 = 90^\circ$
 $\therefore 1m\angle 2 + 1m\angle 4 + 1m\angle 1$
 $= 2m\angle 1 + 1m\angle 4 \Rightarrow 1m\angle 2 = 1m\angle 1$

k) $\triangle DEC \therefore 1m\angle 2 + 1m\angle 3 + 1m\angle DEC$
 $= 2\angle \text{Rectos}$ ($TB\Delta$) ó ($TF\Delta$)

l) $1m\angle 3 = 90^\circ - 1m\angle 1$

(l) en (k)

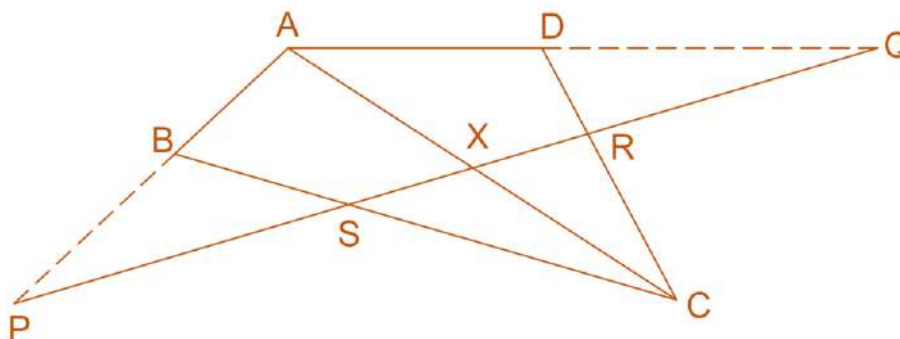
$1m\angle 2 + 90^\circ - 1m\angle 1 + 1m\angle DEC = 180^\circ$

$\Rightarrow * 1m\angle DEC = 90^\circ$ **LQQD.**

Ejercicio 4.19. //

Dada la figura 4.19 demuestre $\frac{\overline{BP} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{DR} \cdot \overline{CS}}{\overline{AP} \cdot \overline{QD} \cdot \overline{RC} \cdot \overline{SB}} = 1$, conociendo que ABCD es un cuadrilátero y $\overline{PQ}$ es secante.

Figura 4.19



H) ABCD cuadrilátero

$\overline{PQ}$ secante

$$T) \frac{\overline{BP} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{DR} \cdot \overline{CS}}{\overline{AP} \cdot \overline{QD} \cdot \overline{RC} \cdot \overline{SB}} = 1$$

Solución:

ΔABC

a) $\overline{BP}$ recta auxiliar por construcción

b) $\overline{AX} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{BP} = \overline{XC} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{AP}$ por teorema de Menelao

$$c) \frac{AX}{XC} = \frac{BS \cdot AP}{SC \cdot BP}$$

ΔADC

d) $\overline{DQ}$ recta auxiliar por construcción

$$e) \quad \overline{AX} \cdot \overline{CR} \cdot \overline{DQ} = \overline{XC} \cdot \overline{DR} \cdot \overline{AQ} \quad \text{por teorema de Menelao}$$

$$f) \quad \frac{AX}{XC} = \frac{DR \cdot AQ}{CR \cdot DQ}$$

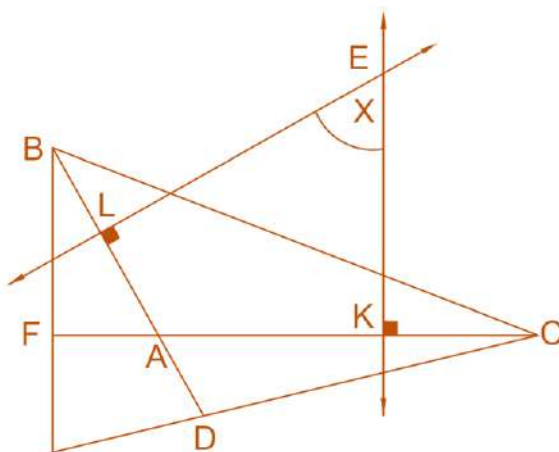
$$(c) = (f)$$

$$\frac{\overline{BS} \cdot \overline{AP}}{\overline{SC} \cdot \overline{BP}} = \frac{\overline{DR} \cdot \overline{AQ}}{\overline{CR} \cdot \overline{QD}} \quad \Rightarrow \quad \cdot \frac{\overline{DR} \cdot \overline{AQ} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{BP}}{\overline{SB} \cdot \overline{AP} \cdot \overline{RC} \cdot \overline{QD}} = 1 \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.20.

Para la figura 4.20, demuestre $m\angle x \equiv m\angle FHD$, sabiendo que H es ortocentro del $\triangle ABC$.

Figura 4.20



H) $H = \text{ortocentro del } \triangle ABC$

T) $m\angle x \equiv m\angle FHD$

Solución:

a) $FC \perp BH$ por definición de altura del triángulo

b) $BD \perp HC$ por definición de altura del triángulo

En el cuadrilátero ALEK

$$c) \quad 1m\angle LAK + 1\angle R + 1m\angle x + 1\angle R$$

$$= 4\angle R \quad \text{suma de ángulos internos}$$

$$d) \quad 1m\angle LAK = 1m\angle FAD = 1m\angle 1 \quad \text{opuestos por el vértice}$$

En el cuadrilátero AFHD

$$e) \quad 1m\angle FAD + 1\angle R + 1m\angle FHD + 1\angle R$$

$$= 4\angle R \quad \text{suma de ángulos internos}$$

$$(c) = (e)$$

$$1m\angle LAK + 1\angle R + 1m\angle x + 1\angle R$$

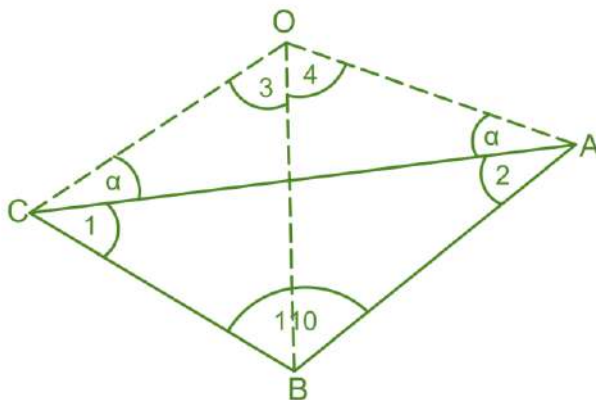
$$= 1m\angle FAD + 1\angle R + 1m\angle FHD + 1\angle R$$

$$* \quad 1m\angle x = 1m\angle FHD \quad \text{LQPD}$$

Ejercicio 4.21. ///

El triángulo escaleno ABC, de la figura 4.21 si el ángulo mide ABC mide 110 y “O” es el circuncentro. ¿Cuánto mide el ángulo AOC?

Figura 4.21



Solución:

a) $OA = OB = OC$ por propiedad del circuncentro

b) $1m\angle 3 + 2m\angle 1 + 2m\angle \alpha = 2\angle R$ T.F. $\triangle COB$ Isósceles

c) $1m\angle 4 + 2m\angle 2 + 2m\angle \alpha = 2\angle R$ T.F. $\triangle BOA$ Isósceles

d) $1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 2m\angle \alpha = 2\angle R$ T.F. $\triangle AOC$

e) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 110^\circ = 2\angle R$ $\triangle ABC$ escaleno

f) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 70^\circ$

(b) + (c)

g) $1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 2m\angle 1 + 2m\angle 2 + 4m\angle \alpha = 4\angle R$

(f) en (g)

$$1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 140 + 4m\angle \alpha = 360^\circ$$

h) $1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 4m\angle \alpha = 220^\circ$

(h) en (d)

$$4m\angle \alpha - 2m\angle \alpha = 220^\circ - 180^\circ \Rightarrow 2m\angle \alpha$$

$$= 40^\circ \quad (i)$$

j) $1m\angle 3 + 1m\angle 4 = 1m\angle AOC$

(i) en (h)

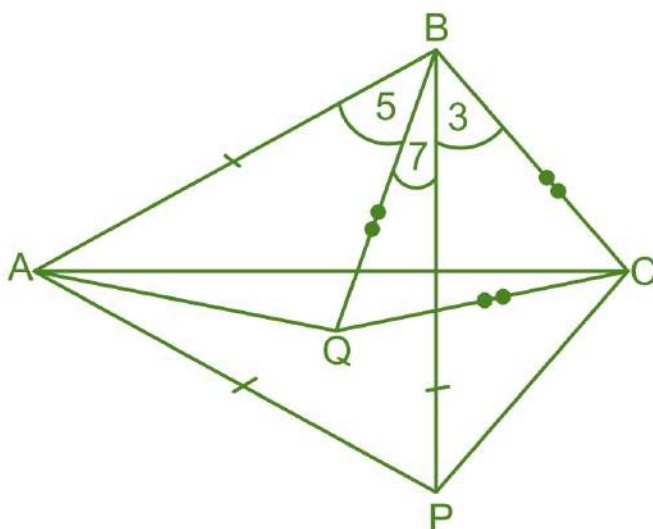
$$1m\angle 3 + 1m\angle 4 + 2(40^\circ) = 220^\circ \Rightarrow * \quad 1m\angle AOC$$

$$= 140^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.22.

Dada la figura 4.22, demuestre $AQ = CP$, conociendo que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros.

Figura 4.22



H) $\triangle ABP \wedge \triangle BCQ$ equiláteros

T) $AQ = CP$

Solución:

$\triangle BQC$ equilátero por hipótesis

$$\begin{aligned} \text{a) } 1m\angle QBC &= 1m\angle 3 + 1m\angle 7 \\ &= 60^\circ \quad \text{suma de ángulos consecutivos} \end{aligned}$$

$\triangle ABQ$ equilátero por hipótesis

$$\begin{aligned} \text{b) } 1m\angle ABP &= 1m\angle 5 + 1m\angle 7 \\ &= 60^\circ \quad \text{suma de ángulos consecutivos} \end{aligned}$$

$$(a) = (b)$$

$$1m\angle 3 + 1m\angle 7 = 1m\angle 5 + 1m\angle 7$$

$$1m\angle 3 = 1m\angle 5$$

$$\triangle ABQ \quad \wedge \quad \triangle BPC$$

$$AB = PB \quad (L)$$

$$1m\angle ABQ = 1m\angle PBC \quad (A)$$

$$QB = CB \quad (L)$$

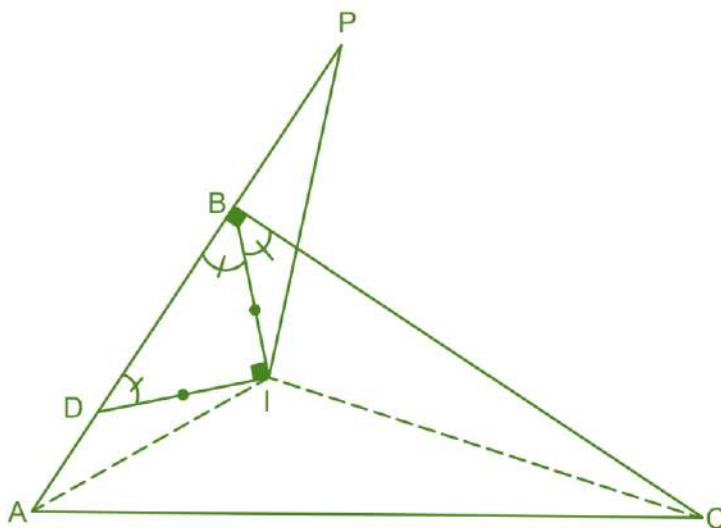
$$\triangle ABQ \cong \triangle BPC \quad (L, A, L)$$

* $AQ = PC \quad LQQD.$

Ejercicio 4.23.

Utilice los datos que se indican en la figura 4.23 para demostrar

$$IP^2 = (AC)(AD)$$

Figura 5.23

H) $I = \text{Incentro del } \triangle ABC$

$$BI = DI$$

$$BP = AD$$

$$T) \quad IP^2 = (AC)(AD)$$

Solución:

$\triangle ABC$

$$a) \quad 1m\angle ABC = 2m\angle 1 = 1\angle R \quad \text{por Incentro}$$

$$b) \quad BI = DI \quad \text{por hipótesis}$$

$$AI = \text{bisectriz del } \angle BAC \quad \text{por construcción}$$

$$CI = \text{bisectriz del } \angle ACB \quad \text{por construcción}$$

$\triangle BDI$ isósceles

$$c) \quad 1m\angle ADI = 1\angle R + 1m\angle 1 \quad \text{por T. ángulo exterior}$$

$$d) \quad 1m\angle PBI = 1\angle R + 1m\angle 1 \quad \text{por T. ángulo exterior}$$

$$(c) = (d)$$

$$e) \quad 1m\angle ADI \cong 1m\angle PBI$$

$$\triangle ADI \approx \triangle PBI \quad (L, A, L)$$

$$f) \quad 1m\angle AIC = 1\angle R + \frac{1m\angle ABC}{2}$$

$$= 90^\circ + 1m\angle 1 \quad \text{por propiedad de las bisectrices internas}$$

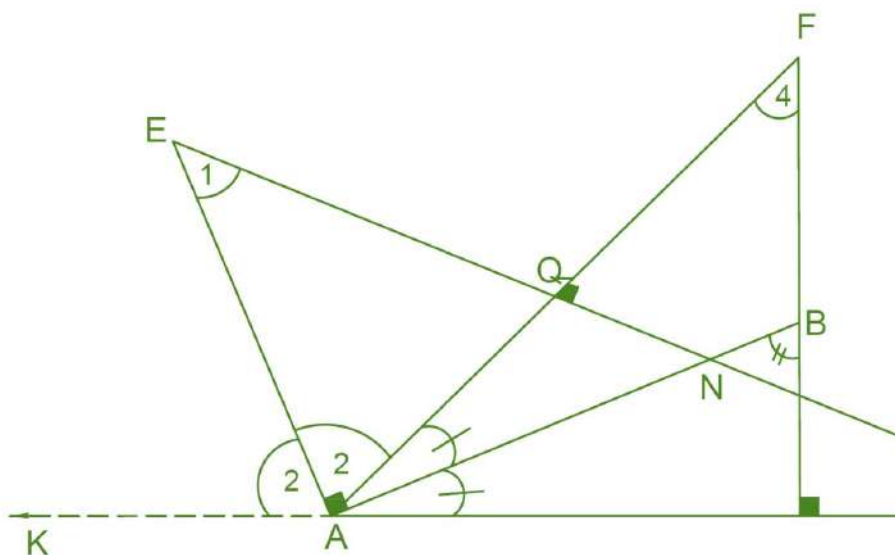
$$\triangle ADI \approx \triangle AIC \quad \therefore \quad \frac{AD}{AI} = \frac{DI}{IC} = \frac{AI}{AC}$$

$$g) \quad AI = IP$$

$$h) \quad \frac{AD}{IP} = \frac{IP}{AC} \quad * \quad IP^2 = (AC)(AD) \quad LQPD.$$

Ejercicio 4.24.

Dada la figura 4.24 demostrar $\triangle ABF \cong \triangle AEC$, sabiendo que $AB = AE$

Figura 4.24

H) $AB = AE$

T) $\triangle ABF \cong \triangle AEC$

Solución:

a) $\Delta B = AE$ por hipótesis

 $\triangle AEQ, \triangle AFD, \triangle ABD, \triangle AQN$ rectángulos

b) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle R$ *T.F. ΔEAQ*

c) $1m\angle 1 + 1m\angle ABD = 1\angle R$ *T.F. $\triangle ABD$*

d) $1m\angle 1 + 1m\angle ANQ = 1\angle R$ *T.F. $\triangle AQN$*

$$(c) = (d)$$

$$\begin{aligned} e) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle ABD &= 1m\angle 1 + 1m\angle ANQ &\Rightarrow \quad 1m\angle ABD \\ &= 1m\angle ANQ = 1m\angle 2 \end{aligned}$$

ΔEAN

$$f) \quad 1m\angle AEN + 1m\angle ANQ = 1m\angle R$$

$$(d) = (f)$$

$$\begin{aligned} g) \quad 1m\angle AEN + 1m\angle ANQ &= 1m\angle 1 + 1m\angle ANQ \\ &\Rightarrow \quad 1m\angle AEN = 1m\angle 1 \end{aligned}$$

$$h) \quad 2m\angle 1 + 1m\angle 4 = 1\angle R \quad T.F. \Delta AQC$$

$$i) \quad 2m\angle 1 + 1m\angle AFD = 1\angle R \quad T.F. \Delta AFD$$

$$(h) = (i)$$

$$\begin{aligned} j) \quad 2m\angle 1 + 1m\angle 4 &= 2m\angle 1 + 1m\angle AAFD &\Rightarrow \quad 1m\angle 4 \\ &= 1m\angle AFD \end{aligned}$$

$$k) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 4 + 1m\angle ABF = 2\angle R \quad T.F. \Delta ABF$$

$$1m\angle 1ABF = 2m\angle 1 + 1m\angle 2$$

$$\Delta EAC \quad \wedge \quad \Delta ABF$$

$$EA = AB \quad (L)$$

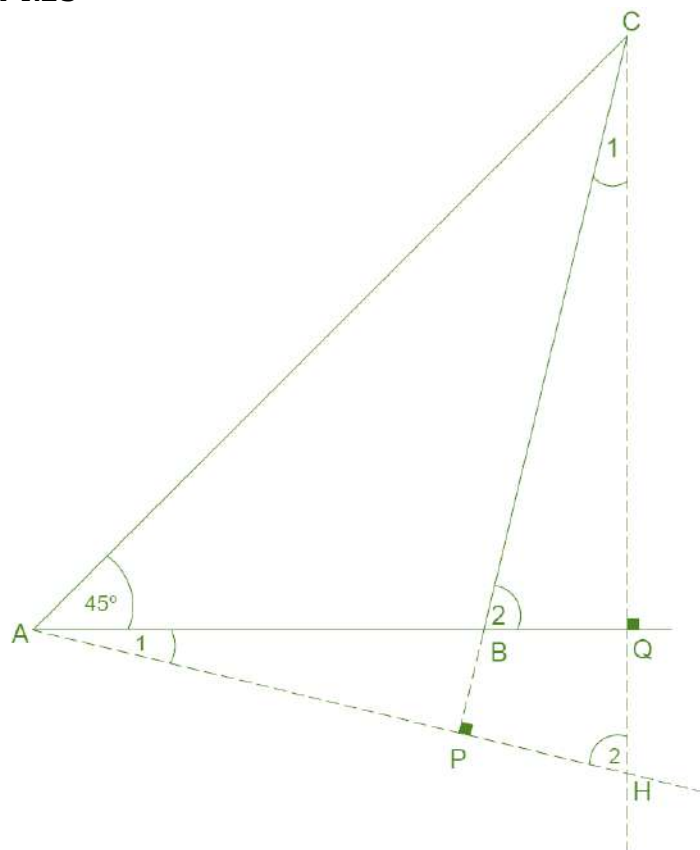
$$1m\angle EAB = 1m\angle ABF \quad (A)$$

$$AB = FB \quad (L) \quad \Rightarrow \quad * \quad \Delta EAC$$

$$\cong \Delta ABF \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.25.

En un triángulo obtusángulo ABC, el ángulo CAB mide 45° y se trazan las alturas AP y CQ cortándose en el ortocentro H. Demostrar que los triángulos AQH y CQB son congruentes. En la figura 4.25

Figura 4.25**Solución:**

- a) $1m\angle COQ = 1m\angle ABP = 1m\angle 2$ *opuestos por el vértice*
 $\triangle CBQ$ *rectángulo*

$$b) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle R \quad T.F.\Delta$$

ΔACP rectángulo

$$c) \quad 1m\angle PAB + 1m\angle 2 = 1\angle R \quad T.F.\Delta$$

$$(b) = (c)$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle PAB + 1m\angle 2 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 1 = 1m\angle PAB$$

ΔAQH rectángulo

$$d) \quad 1m\angle 1 + 1m\angle AHQ = 1m\angle R \quad \Rightarrow \quad 1m\angle AHQ = 1m\angle 2$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta AQH & \wedge & \Delta BQC \\ AH & = & CB \end{array} \quad (L)$$

$$1m\angle AHQ = 1m\angle QCB \quad (A)$$

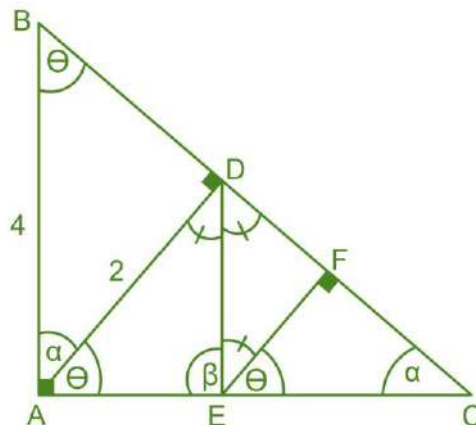
$$HQ = BQ \quad (L) \quad \Rightarrow$$

$$* \quad \Delta AQH \cong \Delta BQC \quad (L, A, L) \quad LQQD.$$

Ejercicio 4.26. ///

En la figura 4.26 considere los datos que se presentan y calcule la medida de EF.

Figura 4.26



$$T) \quad EF = ?$$

Solución:

$\triangle ABC$ rectángulo por hipótesis

a) $DE =$ bisectriz del $\angle ADF$ por hipótesis

$$\begin{aligned} \text{b) } 1m\angle DAE &= 1m\angle FEC \\ &= 1m\angle \theta \quad \text{por ángulos correspondientes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 1m\angle ADE &= 1m\angle DEF \\ &= 1m\angle 1 \quad \text{por ángulos alternos internos} \end{aligned}$$

$\triangle ABD$ rectángulo

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{Sen} \theta &= \frac{AD}{AB} = \frac{2}{4} = 0.5 \quad \therefore \quad 1m\angle \theta = 30^\circ \\ &\Rightarrow \quad 1m\angle \alpha = 60^\circ \end{aligned}$$

$\triangle ABC$

$$\begin{aligned} \text{e) } \operatorname{Sen} 60^\circ &= \frac{AD}{AC} \quad \therefore \quad AC = \frac{2}{\operatorname{Sen} 60^\circ} \quad \Rightarrow \quad AC \\ &= 2.3 \text{ u} \end{aligned}$$

$\triangle ADE$

$$\begin{aligned} \text{f) } 1m\angle \beta &= 180^\circ - 1m\angle \theta - 1m\angle 1 = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ \\ &\Rightarrow \quad 1m\angle \beta = 105^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{Sen} 45^\circ}{AE} = \frac{\operatorname{Sen} 105^\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad AE = 1.47 \text{ u}$$

$$\text{g) } EC = AC - AE = 2.3 \text{ u} - 1.47 \text{ u} \quad \Rightarrow \quad EC = 0.83 \text{ u}$$

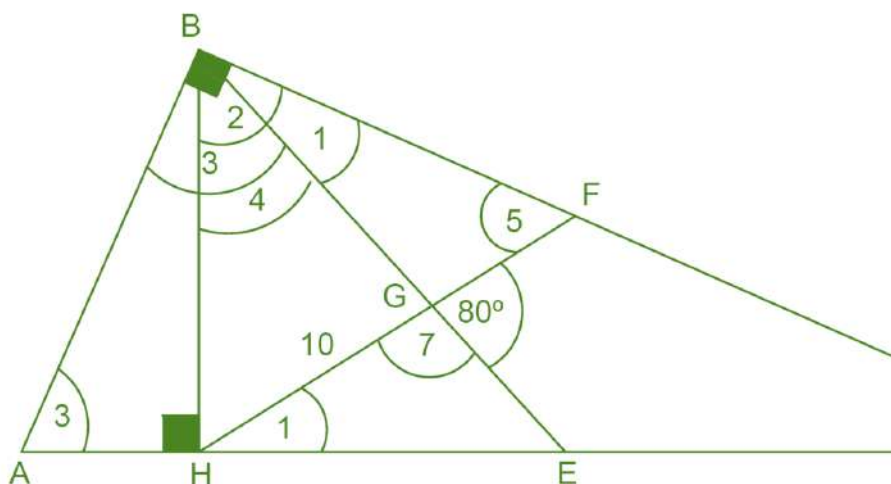
$\triangle EFC$ rectángulo

$$\begin{aligned} \text{h) } \operatorname{Sen} 60^\circ &= \frac{EF}{EC} \quad \therefore \quad EF \\ &= (\operatorname{Sen} 60^\circ)(0.83 \text{ u}) \quad \Rightarrow \quad * \quad EF \\ &= 0.72 \text{ u} \quad \text{LQQD.} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.27.

Considere la figura 4.27 para determinar la medida de GE, conociendo $AE = EC$

Figura 4.27



H) $AE = EC$

T) $GE = ?$

Solución:

$\triangle BHC$ rectángulo por hipótesis

a) $HE = mediana$

b) $HE = EB = EC$ propiedad de la mediana de un $\triangle$

$\triangle HEC \wedge \triangle HBE$ son isósceles

$\triangle ABC$ rectángulo por hipótesis

c) $BE = mediana$

d) $AE = EC = BE$ propiedad de la mediana de un $\triangle$

$\triangle ABE \wedge \triangle BEC$ son isósceles

e) $1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1\angle R$ T.F. $\triangle ABC$

f) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1\angle R$ T.F. $\triangle BHC$

$$1m\angle 3 = 1m\angle 2$$

$$\triangle BEC \cong \triangle HEC \quad (A, L, A)$$

g) $1m\angle 1 + 1m\angle 5 = 80^\circ$ T. $\angle$ exterior al $\triangle HGE$

h) $1m\angle 2 + 1m\angle 4 = 100^\circ$ T.F. $\triangle HGB$

$$1m\angle 5 = 2m\angle 1 \quad \text{T. } \angle \text{ exterior al } \triangle HEC$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 5 = 80^\circ \quad \text{T. } \angle \text{ exterior al } \triangle HGE$$

i) $80^\circ = 3m\angle 1 \Rightarrow 1m\angle 1 = 26.66^\circ$

$$1m\angle 3 = 1m\angle 2 = 63.34^\circ$$

$$1m\angle 5 = 53.32^\circ$$

$$1m\angle 4 = 36.68^\circ$$

$\triangle HGE$

$$1m\angle 7 = 180^\circ - 26.66^\circ - 53.32^\circ \Rightarrow 1m\angle 7 = 100.20^\circ$$

j) $\frac{\text{Sen } \angle 5}{HG} = \frac{\text{Sen } \angle 1}{GE} \quad \therefore \quad GE$

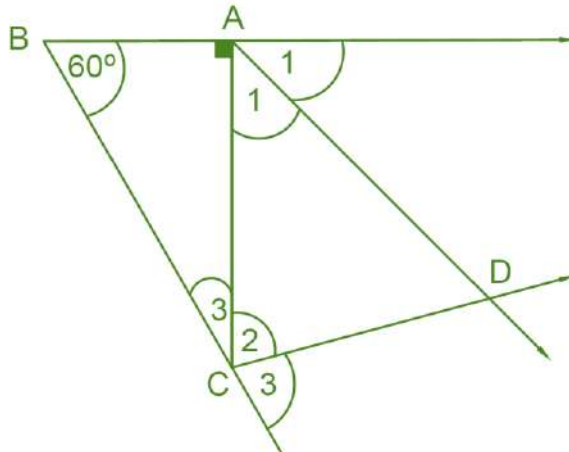
$$= \frac{(\text{Sen } 26.66^\circ)(10u)}{\text{Sen } 53.32^\circ} \Rightarrow * \quad GE$$

$$= 5.59u \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 4.28. //

Dada la figura 4.28, determinar la medida de AD.

Figura 4.28



T) $AD = ?$

Solución:

a) $\triangle ABC$ rectángulo por hipótesis

b) $1m\angle 3 = 30^\circ$

c) $1m\angle 1 = 45^\circ$

d) $2m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1m\angle BCK$

$= 2\angle R$ suma de ángulos consecutivos

e) $1m\angle 2 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} \Rightarrow 1m\angle 2 = 75^\circ$

$\triangle CAD$

f) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 1m\angle 4 = 2\angle R$ T.F. $\triangle$

$1m\angle 4 = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ \Rightarrow 1m\angle 4 = 60^\circ$

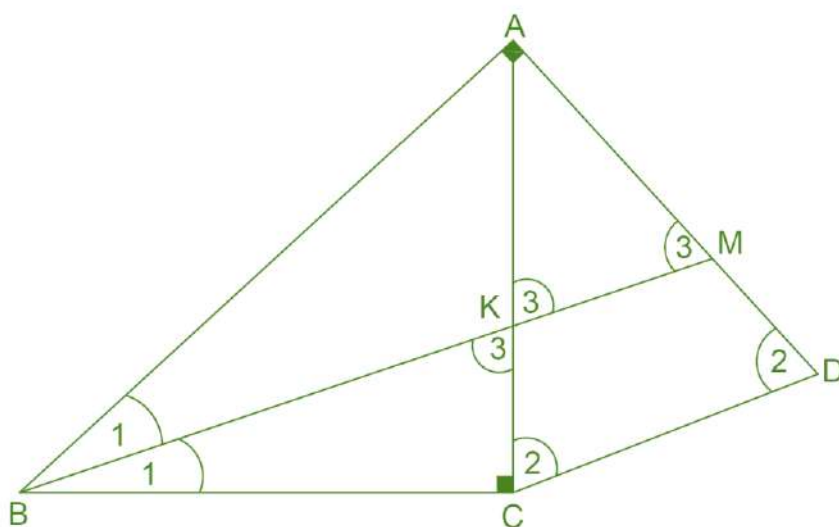
$$h) \quad \frac{\text{Sen } \angle 2}{AD} = \frac{\text{Sen } \angle 4}{AC} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{(\text{Sen } 75^\circ)(8.6u)}{\text{Sen } 60^\circ}$$

$$* \quad AD = 9.59u \quad LQPD.$$

Ejercicio 4.29.

Demostrar que $(AB)(MD) = (BC)(AM)$, considere los datos de la figura 4.29

Figura 4.29



$$H) \quad AC = AD$$

$$T) \quad (AB)(MD) = (BC)(AM)$$

Solución:

$$a) \quad AC = AD \quad \text{por hipótesis}$$

$\triangle ACD$ isósceles por hipótesis

$$b) \quad 1m\angle ACD = 1m\angle CDA = 1m\angle 2 \quad T. \triangle \text{ isósceles}$$

$\triangle BAM$ rectángulo por hipótesis gráfica

c) $1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1\angle R$ T. F. Δ
 ΔBCK rectángulo por hipótesis gráfica

d) $1m\angle 1 + 1m\angle BKC = 1\angle R$
 $(c) = (d)$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 3 = 1m\angle 1 + 1m\angle BKC \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 3 = 1m\angle BKC$$

e) $1m\angle BCK = 1m\angle AKM$
 $= 1m\angle 3$ ángulos opuestos por el vértice
 ΔAKM isósceles

f) $AK = AM$ T. Δ isósceles

g) $AK = AM = MD$

$M =$ punto medio de AD

$$AC = AK + KC$$

$$AC - AK = KC \quad \Rightarrow \quad MD = KC$$

h) $\Delta AMB \cong \Delta BKC$

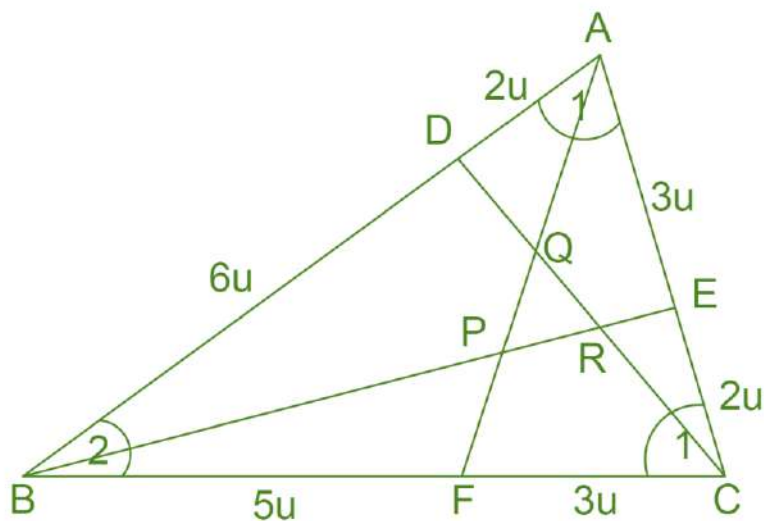
$$i) \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{KC} = \frac{BM}{BK} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MD}$$

$$* \quad (AB)(MD) = (AM)(BC) \quad \text{LQPD.}$$

Ejercicio 4.30.

Con los datos que se presentan en la figura 4.30, calcular las medidas de los segmentos RQ, PQ y PR.

Figura 4.30



H) $AD = 2u$ BD

$= 6u$

$AE = 3u$ $EC = 2u$

$CF = 3u$ $BF = 5u$

T) $RQ = ?$

$PQ = ?$

$PR = ?$

Solución:

ΔABC

$$\begin{aligned} a) \quad \cos \angle 1 &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{(2)(AB)(AC)} \\ &= \frac{(8u)^2 + (5u)^2 - (8u)^2}{(2)(8u)(5)} \quad \text{ley del coseno} \end{aligned}$$

$$1m\angle 1 = 71.8^\circ$$

$$b) \quad AB = BC \quad \text{por hipótesis}$$

ΔABC isósceles

$$c) \quad 1m\angle BCA = 1m\angle 1 = 71.8^\circ \quad \text{por T. } \Delta \text{ isósceles}$$

$$d) \quad 1m\angle ABC = 1m\angle 2 = 36.7^\circ$$

ΔADC

$$DC = \sqrt{AD^2 + AC^2 - (2)(AD)(AC) \cos \angle 1} \quad \text{ley del coseno}$$

$$\begin{aligned} e) \quad DC &= \sqrt{(2u)^2 + (5u)^2 - (2)(2u)(5u) \cos 71.8^\circ} \quad \Rightarrow \quad DC \\ &= 4.77u \end{aligned}$$

ΔAFC

$$AF = \sqrt{FC^2 + AC^2 - (2)(FC)(AC) \cos \angle 1} \quad \text{ley del coseno}$$

$$\begin{aligned} f) \quad AF &= \sqrt{(3u)^2 + (5u)^2 - (2)(3u)(5u) \cos 71.8^\circ} \\ &\Rightarrow \quad AF = 4.96u \end{aligned}$$

ΔABE

$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2 - (2)(AE)(AB) \cos \angle 1}$$

$$\begin{aligned} g) \quad BE &= \sqrt{(3u)^2 + (8u)^2 - (2)(3u)(8u) \cos 71.8^\circ} \\ &\Rightarrow \quad BE = 7.62u \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔAFC

$BE = \text{transversal}$

$$h) \quad (EC)(AP)(BF) = (AE)(PF)(BC) \quad \Rightarrow \quad (2u)(AP)(5u) \\ = (3u)(PF)(8u)$$

$$(10u)(4.96 - PF) = (24u)PF \quad \Rightarrow \quad PF = 1.46u$$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔABF

CD = transversal

$$i) \quad (BD)(AQ)(FC) = (DA)(QF)(BC) \quad \Rightarrow \quad (6u)(AQ)(3u) \\ = (2u)(QF)(8u)$$

$$(18u)(4.96u - QF) = (16u)(QF) \quad \Rightarrow \quad QF = 2.63u$$

$$j) \quad PQ = QF - PF = 2.63u - 1.46u \quad \Rightarrow \quad * \quad \mathbf{PQ}$$

$$= \mathbf{1.17 \, u \quad LQQD.}$$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔABE

CD = transversal

$$k) \quad (BD)(RE)(AC) = (DA)(BR)(EC) \quad \Rightarrow \quad (6u)(RE)(5u) \\ = (2u)(BR)(2u)$$

$$(30u)(BE - BR) = (4u)(BR) \quad \Rightarrow \quad 30u(7.62 - BR)$$

$$= (4u)(BR) \quad \Rightarrow \quad BR = 6.72u$$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔBEC

AF = transversal

$$l) \quad (BP)(AE)(FC) = (AC)(PE)(AC) \quad \Rightarrow \quad (BP)(3u)(3u) \\ = (5u)(PE)(5u) \quad \Rightarrow \quad (9u)(BP) = 25(PE)$$

$$(9u)(BP) = (25u)(BE - BP) \quad \Rightarrow \quad (9u)(BP)$$

$$= (25u)(7.62 - BP) \quad \Rightarrow \quad BP = 5.6u$$

$$m) \quad PR = BR - BP = 6.72u - 5.6u \quad \Rightarrow \quad * \quad \mathbf{PR}$$

$$= \mathbf{1.12 \, u \quad LQQD}$$

Utilizando el teorema de Menelao en el ΔABE

DC = transversal

$$\begin{aligned}
n) \quad (AB)(DR)(EC) &= (BD)(AE)(RC) &\Rightarrow (8u)(DR)(2u) \\
&= (6u)(3u)(RC) &\Rightarrow (16u)(DR) \\
&= (18u)(RC) \\
(16u)(DC - RC) &= (18u)(RC) &\Rightarrow (16u)(4.77u - RC) \\
&= (18u)(RC) &\Rightarrow RC = 2.24u
\end{aligned}$$

Por el teorema de Menelao en el ΔADC

$AF = transversal$

$$\begin{aligned}
n) \quad (AB)(DQ)(FC) &= (DA)(QC)(BF) &\Rightarrow (8u)(DQ)(3u) \\
&= (2u)(QC)(5u) &\Rightarrow (24u)(DQ) \\
&= (10u)(QC) \\
(24u)(DC - QC) &= (10u)(QC) \\
&\Rightarrow (24u)(4.77u - QC) = (10u)(QC) \\
&\Rightarrow QC = 3.36u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
o) \quad QR &= QC - RC = 3.36u - 2.24u &\Rightarrow * \quad \mathbf{QR} \\
&= \mathbf{1.12u}
\end{aligned}$$



CAPÍTULO 5

Círculo y circunferencia



Capítulo 5

Círculo y circunferencia

*Las ciencias matemáticas exhiben
particularmente orden, simetría y límites;
y esas son las más grandes formas de belleza.*

- Aristóteles.

Objetivo

Definir, interpretar y analizar la relación de las líneas con la circunferencia, establecer las características de los ángulos que se ubican en la circunferencia, permitir que el lector sea capaz de diferenciar y aplicar las propiedades del círculo con la circunferencia.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Diferenciar entre círculo y circunferencia.
- Definir los elementos de la circunferencia.
- Identificar los tipos de ángulos en la circunferencia.
- Demostrar las proposiciones que relacionen a la circunferencia.
- Realizar ejercicios de aplicación sobre circunferencias.

5.1 Introducción teórica

Propiedades de las tangentes a una circunferencia

- Toda tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en su punto de contacto.
- Primera propiedad. - Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales.
- Segunda propiedad. - Las tangentes interiores comunes a dos circunferencias son iguales.
- Tercera propiedad. - Las tangentes exteriores comunes a dos circunferencias son iguales.

Ángulo inscrito. - Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son dos cuerdas, su medida es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Ángulo semi-inscrito. - Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una tangente; su medida es igual a la mitad del ángulo central correspondiente al arco comprendido entre sus lados.

Ángulo ex-inscrito. - Es el ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son una cuerda y una secante; su medida es igual a la semi - suma de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y entre los lados del ángulo opuesto por el vértice.

Ángulo central. - Es el ángulo que tiene como vértice el centro de la circunferencia y como lados dos radios de la misma, su medida es igual directamente al arco comprendido entre sus lados.

Ángulo interior. - Es el ángulo que tiene su vértice dentro de la circunferencia y sus lados son dos cuerdas que cortan, su medida es igual a la semi - suma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.

Ángulo exterior. - Es el ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados pueden ser:

- Formados por dos tangentes.
- Formados por dos secantes.
- Formados por una secante y una tangente.

Su medida es igual a la semi - diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados, es decir es igual a la semi - diferencia entre el arco mayor y el arco menor.

Arco capaz de un ángulo. - Es el lugar geométrico de todos los puntos que al unirlos con otros dos puntos fijos forman ángulos inscritos iguales.

Teoremas y corolarios del círculo

- En un mismo círculo o en círculos iguales, ángulos centrales iguales interceptan arcos iguales, y el mayor de dos ángulos centrales desiguales intercepta mayor arco.
- En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales y el mayor de dos arcos desiguales es subtendido por la mayor cuerda.
- La perpendicular trazada por el centro de un círculo a una cuerda biseca la cuerda y los arcos subtendidos.
- Toda tangente a un círculo es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.
- En todo círculo, dos paralelas interceptan arcos iguales:
 - a.- Cuando las rectas paralelas son secantes.
 - b.- Una de las dos paralelas es secante y la otra tangente.
 - c.- Las dos rectas son tangentes.
- La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es la perpendicular bisectriz de la cuerda común.

Relaciones métricas en la circunferencia

- **Relaciones entre las cuerdas.** - Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los dos segmentos en una cuerda es igual al producto de dos segmentos determinados en la otra.

- **Relaciones entre secantes.** - Si por un punto exterior de una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una secante por su segmento exterior, es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.

- **Relación métrica entre la tangente y la secante trazada desde un punto exterior a una circunferencia.**
 - Si por un punto exterior de una circunferencia se trazan una tangente y una secante es medida proporcional entre la secante y su segmento exterior.

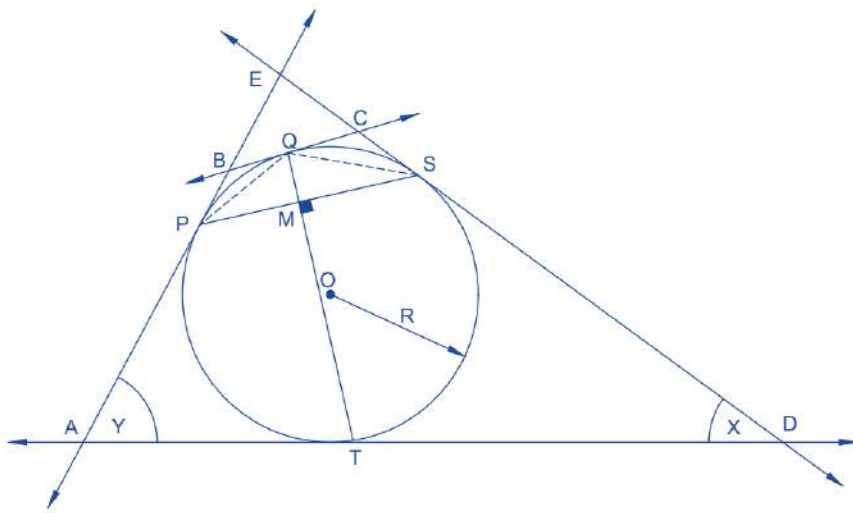
 - El producto de los lados de un triángulo es igual al producto de la altura correspondiente al tercer lado por el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

5.2 Ejercicios resueltos de círculo y circunferencia

Ejercicio 5.1.

Hallar la medida del ángulo $\angle x$ y $\angle y$. Sabiendo que las rectas $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AB}$ son tangentes a la circunferencia de radio R , la medida del $\angle BCS = 100^\circ$ y $\angle BEC = 70^\circ$

Figura 5.1



H) $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AB}$, $Tangents(O, R)$

$$1m\angle BCS = 100^\circ$$

$$1m\angle BEC = 70^\circ$$

T) $1m\angle x = ?$

$$1m\angle y = ?$$

Solución:

- a) $\overline{PQ}$ y $\overline{QS}$ cuerdas por construcción
- b) $1m\angle EBC + 1m\angle BEC + 1m\angle ECB = 2\angle \text{Rectos}$
 $= 180^\circ$ T.F. $\triangle BEC$
 $1m\angle EBC = 180^\circ - 1m\angle BEC + 1m\angle ECB$
 $\therefore 1m\angle EBC = 180^\circ - 70^\circ - (180^\circ - 1m\angle BCS)$
- c) $1m\angle EBC = 30^\circ$
- d) $1m\angle ABC = 180^\circ - 1m\angle EBC$ por ángulo llano
 $\Rightarrow 1m\angle ABC = 150^\circ$
 $\triangle BPQ$ Isosceles : $\overline{BP} = \overline{PQ} \Rightarrow 1m\angle ABC$
 $= 1m\angle PBQ$
- f) $1m\angle BPQ = \frac{180^\circ - 1m\angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} \Rightarrow 1m\angle BPQ$
 $= 15^\circ$
- g) $1m\angle BPQ = \text{ángulo semi-inscrito} = \frac{\text{arco } PQ}{2} \Rightarrow \text{arco } PQ$
 $= 30^\circ$
- h) $1m\angle SMT = 90^\circ$
 $= \frac{\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{ST}}{2}$ por ángulo interior : 180°
 $-\overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{ST} \Rightarrow \overset{\frown}{ST} = 150^\circ$
 $\triangle QCS$ Isósceles : $\overline{QC} = \overline{CS}$: $1m\angle QCS = 180^\circ - 2m\angle CQS$
 $1m\angle CQS = \frac{180^\circ - 1m\angle QCS}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$
 $\therefore 1m\angle CQS = 40^\circ = 1m\angle CSQ$
 $1m\angle CQS = \frac{\overset{\frown}{QS}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{QS} = 80^\circ$
- i) $\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QS} + \overset{\frown}{ST} + \overset{\frown}{TP}$
 $= 360^\circ$ por suma de arcos en el círculo
 $\therefore \overset{\frown}{TP} = 100^\circ$
- j) $1m\angle x = \frac{\left(\overset{\frown}{SQ} + \overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{TP} \right) - \overset{\frown}{ST}}{2} = \frac{(80^\circ + 30^\circ + 100^\circ) - 150^\circ}{2}$
 $\therefore 1m\angle x = 30^\circ$ LQPD.
 $\triangle AED$

$1m\angle y = 80^0$ *LQQD*.

Dada la figura 5.2. Determinar la medida del ángulo $\angle x$. Conociendo θ (O_1, R_1) Tang. θ (O_2, R_2) y la recta $\overrightarrow{AC}$ es tangente a la circunferencia (O_2, R_2)

The diagram shows two circles, one centered at O_1 and the other at O_2 . A line segment AC is drawn, passing through point B on the first circle and ending at point C on the second circle. A dashed line connects the centers O_1 and O_2 . Angles are labeled as follows: $\angle 1$ is at point C , $\angle 2$ is at point B , $\angle 3$ is at O_1 , and $\angle 4$ is at O_2 . A right angle is marked at point C between the line segment AC and the line segment BC .

$$\overrightarrow{AC} \text{ Tang. } \odot (O_2, R_2)$$

T) $1m\angle BDC = 45^0$

Solución:

a) $\overline{O_i D} = R_i$ por construcción

b) $\overline{O_2 D} = R_2$ por construcción

c) $\overline{O_2 C} = R_2 \Rightarrow R_2 \perp \overline{AC}$

$\Delta O_1 O_2 C$ Rectángulo

d) $\overrightarrow{AC}$ Tang $\theta(O_2, R_2)$ por hipótesis

$\overrightarrow{AC}$

$\perp CO_2$ por propiedad de las tangentes a una circunferencia

$\overline{O_1 O_2}$

$= R_1 + R_2$ por propiedad de las circunferencias tangentes

$\Delta O_1 BD$ Isósceles

$\overline{O_1 B} = \overline{O_1 D} = R_1 \quad \therefore \quad 1m\angle O_1 BD = 1m\angle O_1 DB$

$= 1m\angle 2 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle BDC = 1m\angle x$

e) $1m\angle 1 + 1m\angle x$

$= 1m\angle 3$

$+ 1m\angle 2$ por teorema de ángulo exterior

f) $1m\angle 2 + 1m\angle x$

$= 1m\angle 1 + 1m\angle 4$ por teorema de ángulo exterior al ΔCDO_2

$(e) + (f)$

$1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 2m\angle x = 1m\angle 1 + 1m\angle 2 + 1m\angle 3 + 1m\angle 4$

g) $2m\angle x = 1m\angle 3 + 1m\angle 4$

$\Delta O_1 CO_2$ rectángulo

h) $1m\angle 3 + 1m\angle 4 = 90^\circ$

(h) en (g)

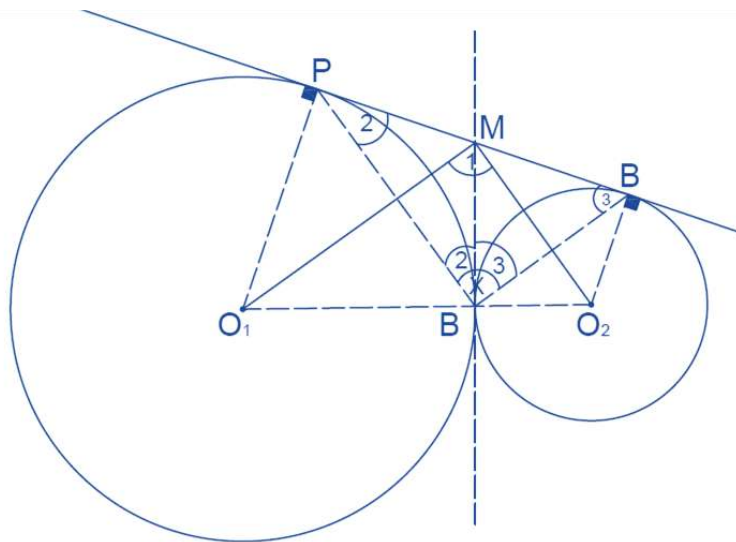
$2m\angle x = 90^\circ$

$1m\angle BDC = 1m\angle x = 45^\circ$ LQQD.

Ejercicio 5.3.

Con relación a la figura 5.3. Hallar la medida del ángulo $\angle 1$. Sabiendo que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ es tangente a la circunferencia de R_1 y R_2 y los segmentos $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$

Figura 5.3



H) $\overleftrightarrow{PQ}$ Tang $\theta(O_1, R_1)$ y $\theta(O_2, R_2)$

$$\overline{PM} \cong \overline{MQ}$$

T) $m\angle 1 = ?$

Solución:

a) $\overline{PM} = \overline{MQ}$ por hipótesis

$\overline{PO_1} = R_1$ por construcción.

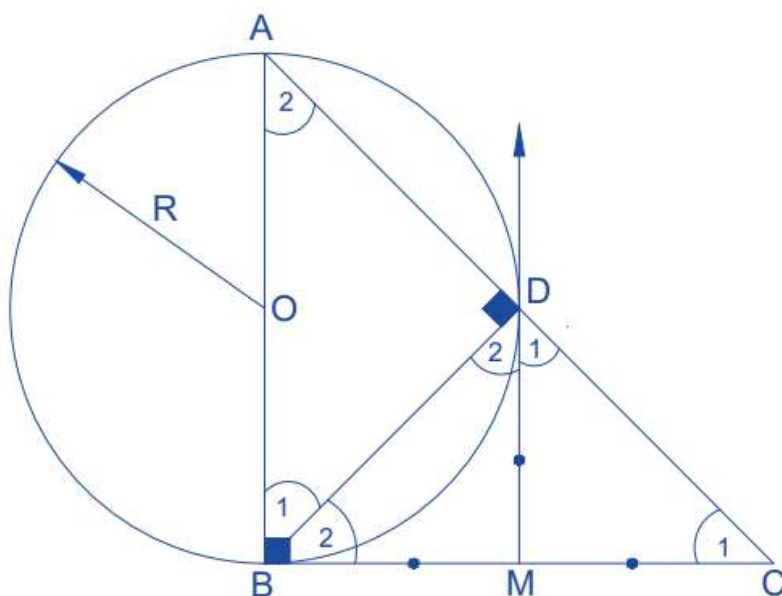
$\overline{QO_2} = R_2$ por construcción.

- b) $\overline{O_1O_2} = R_2 + R_1$ por construcción.
 $\overline{PB}, \overline{QB}$ cuerdas auxiliares por const.
- c) $\overline{MB} = \text{TANG. } \theta(O_1, R_1) \wedge \theta(O_2, R_2)$ por construcción
- d) ΔPO_1M y $\Delta MQO_2 \rightarrow \text{rectángulos por teorema.}$
 $1m\angle O_1PM = 90^\circ$
- e) $1m\angle MPB = 1m\angle 2$
- f) $1m\angle O_1PB = 90^\circ - 1m\angle 2$
 ΔO_1PB Isósceles $\Rightarrow \overline{PO_1} = \overline{O_1B} = R_1$
- g) $1m\angle PBO_1 = 90^\circ - 1m\angle 2$
 $1m\angle MQO_2 = 90^\circ \Rightarrow 1m\angle MQB = 1m\angle 3$
 $\Delta BQO_2 \rightarrow \text{isósceles} \Rightarrow 1m\angle BQO_2 = 1m\angle QBO_2$
- h) $1m\angle QBO_2 = 90^\circ - 1m\angle 3$
 $1m\angle PQB = 1m\angle x$
- i) $1m\angle x = 180^\circ - (90^\circ - 1m\angle 2 + 90^\circ - 1m\angle 3)$
 $1m\angle x = 1m\angle QBM + 1m\angle MBP$ suma de ángulos consecutivos
- j) $\overline{PM} = \overline{MB} = \overline{MQ}$ por propiedad de las tangentes
 ΔBMQ y ΔPMB son isósceles
 $1m\angle QBM = 1m\angle 3$
- k) $1m\angle MBP = 1m\angle 2$
- l) $1m\angle x = 180^\circ - (1m\angle 3 + 1m\angle 2)$ TFA ΔPQB
(k) en (l)
- ll) $m\angle x = 180^\circ - 1m\angle x$
 $1mx = 90^\circ$

Ejercicio 5.4.

Dada la figura 5.4. Demostrar $\overline{BM} \cong \overline{MC}$. Conociendo que $\overline{DM}$ tangente $\odot (O,R)$ en "D".

Figura 5.4



H) $\overline{DM}$ tangente $\odot (O,R)$ en "D"

T) $\overline{BM} \cong \overline{MC}$

Solución:

a) $\overline{MD}$ tang. $\odot (OR)$ por hipótesis.

b) $\overline{BM} = \overline{MD}$ por propiedad de las tangentes

$$c) \quad 1m\angle ADM = \text{ángulo semi-inscrito} = \frac{\hat{AB}}{2} + \frac{\hat{BD}}{2}$$

$$d) \quad 1m\angle ACB = \text{ángulo exterior} = \frac{\hat{AB}}{2} - \frac{\hat{BD}}{2}$$

$$(b) + (c)$$

$$\left(\frac{\hat{AB}}{2} + \frac{\hat{BD}}{2} \right) + \left(\frac{\hat{AB}}{2} - \frac{\hat{BD}}{2} \right) = 1m\angle ADM + 1m\angle ACB$$

$$= \hat{AB} \qquad \qquad \qquad \therefore \hat{AB}$$

$$= 2\text{ángulos rectos} = 180^\circ$$

$$e) \quad 1m\angle ADM + 1m\angle ACB = 180^\circ$$

$$f) \quad 1m\angle ADC = \text{ángulo llano} = 180^\circ = 1m\angle ADM + 1m\angle MDC$$

$$(e) = (f)$$

$$1m\angle ADM + 1m\angle ACB = 1m\angle ADM + 1m\angle MDC$$

$$\therefore \quad 1m\angle ACB = 1m\angle MDC$$

$$\Rightarrow \quad \Delta MDC \text{ es isósceles}$$

$$g) \quad \overline{DM} = \overline{MC}$$

$$(b) = (g)$$

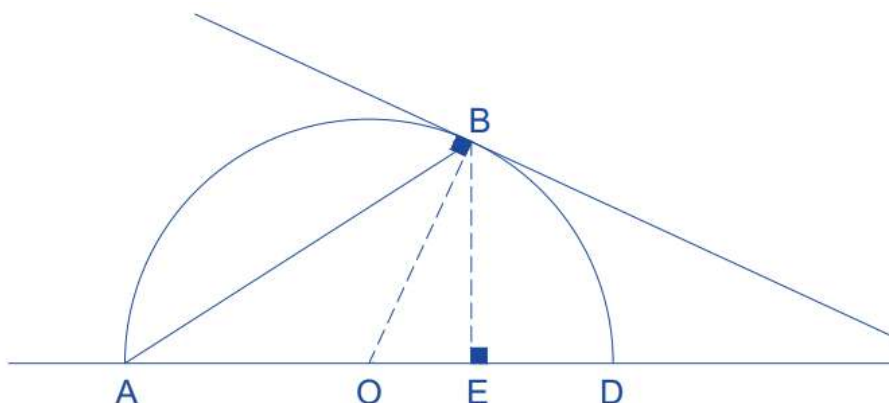
$$\overline{BM} = \overline{DM} = \overline{MC}$$

$$\overline{BM} \cong \overline{MC} \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.5.

Considere la figura 5.5. Determinar la medida del segmento $\overline{BC}$.
Sabiendo que $\overline{BC}$ es tangente $\theta(O,R)$, $\overline{AB} = 4m$ l y $\overline{AO} = 2.5m$.

Figura 5.5



H) $\overline{BC}$ tangente $\theta(O,R)$

$$\overline{AB} = 4m$$

$$\overline{AO} = 2.5m$$

T) $\overline{BC} = ?$

Solución:

$\overline{BD}$ = cuerda por construcción

$$a) \quad 1m\angle ABD = \text{Ángulo inscrito} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 1m\angle ABD = 90^\circ$$

$\overline{BE}$ = Altura de los triángulos $ABD \wedge ABC$

$$b) \quad \overline{AD} = 2\overline{AO} = 2\overline{OD} = 2R = 5m$$

$$c) \quad \overline{BC}^2 = (\overline{AC})(\overline{DC}) \quad \text{por relación métrica de la secante con la tangente}$$

ΔABD rectángulo

$$d) \quad \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 \quad \text{por Pitágoras}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2 = [(5)^2 - (4)^2]m^2 = \sqrt{9m^2}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{BD} = 3m$$

$$e) \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \quad \text{propiedad de los triángulos rectángulos}$$

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}} = \frac{16m^2}{3m} \quad \Rightarrow \quad \overline{AE} = 3.2 \, m$$

$$f) \quad \overline{ED} = \overline{AD} - \overline{AE} = (5 - 3.2)m \quad \Rightarrow \quad \overline{ED} = 1.8m$$

$$g) \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} \quad \text{por propiedad de los } \Delta \text{ rectángulo}$$

$$\overline{BE}^2 = (\overline{AE}) \cdot (\overline{ED}) = (3.2m)(1.8m) \quad \Rightarrow \quad \overline{BE} = 2.4m$$

$$h) \quad \overline{OE} = \overline{OD} - \overline{ED} = (2.5m - 1.8m) \quad \Rightarrow \quad \overline{OE} = 0.7m$$

$$i) \quad \frac{\overline{OE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{EC} = \frac{\overline{BE}^2}{\overline{OE}} = \frac{(2.4m)^2}{0.7m} \quad \Rightarrow \quad \overline{EC} = 8.2m$$

ΔEBC rectángulo

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2 \quad : \quad \overline{BC}^2 = (2.4m)^2 + (8.2m)^2$$

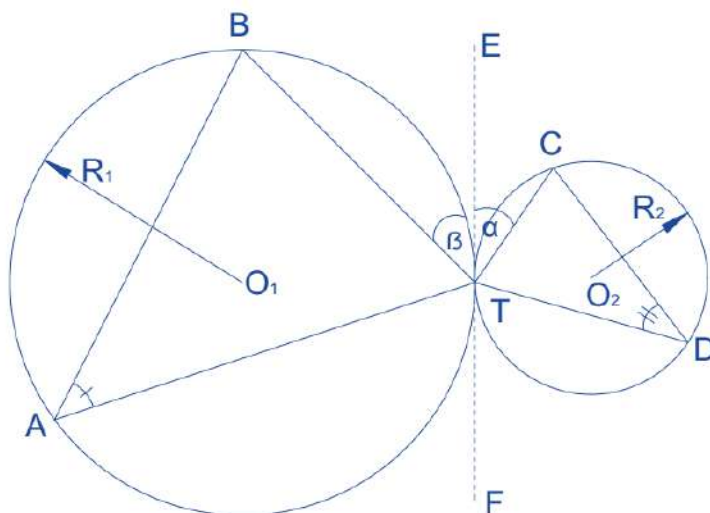
$$= 73m^2$$

$$\overline{BC} = 8.54m \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 5.6.

Dada la figura 5.6. Determinar la medida del ángulo $\angle 1$ y $\angle 2$. Sabiendo $1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 20^\circ$ y la medida del ángulo $\angle BTC = 100^\circ$

Figura 5.6



H) $1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 20^\circ$

$1m\angle BTC = 100^\circ$

T) $1m\angle 1 = ?$

$1m\angle 2 = ?$

Solución:

a) $\overrightarrow{ETF} \text{ tag } \theta(O_1; R) \wedge (O_2; r) \quad \text{por construcción}$

b) $1m\angle 1 = \frac{\overset{\cap}{BT}}{2} \quad \text{por ángulo inscrito}$

$$c) \quad 1m\angle 2 = \frac{\hat{CT}}{2} \quad \text{por ángulo inscrito}$$

$$d) \quad 1m\angle 2 - 1m\angle 1 = 20^\circ \quad \text{por hipótesis}$$

(b) y (c) en (d)

$$\frac{\hat{CT}}{2} - \frac{\hat{BT}}{2} = 20^\circ$$

$$e) \quad \hat{CT} - \hat{BT} = 40^\circ$$

$$f) \quad 1m\angle \alpha \quad \wedge \quad 1m\angle \beta \quad \text{por construcción}$$

$$g) \quad 1m\angle \alpha = \frac{\hat{CT}}{2} \quad \text{por ángulo semi-inscrito}$$

$$h) \quad 1m\angle \beta = \frac{\hat{BT}}{2} \quad \text{por ángulo semi-inscrito}$$

$$i) \quad 1m\angle \alpha + 1m\angle \beta = \frac{\hat{CT}}{2} + \frac{\hat{BT}}{2}$$

$$j) \quad 1m\angle BTC = \frac{\hat{CT} + \hat{BT}}{2}$$

$$k) \quad 2(100^\circ) = \hat{CT} + \hat{BT} = 200^\circ$$

(e) = (k)

$$2\hat{CT} = 240^\circ \quad \Rightarrow \quad \hat{CT} = 120^\circ \quad \wedge \quad \hat{BT} = 80^\circ$$

$$b) \quad 1m\angle 1 = \frac{80^\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle 1 = 40^\circ \quad LQQD.$$

$$c) \quad 1m\angle 2 = \frac{120^\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle 2 = 60^\circ \quad LQQD.$$

$$36^\circ = \frac{128^\circ - \hat{CF}}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{CF} = 56^\circ$$

$$b) \quad 1m\angle DKA = 90^\circ = \frac{\hat{CFD} + \hat{BE}}{2} \quad \text{por ángulo interior}$$

$$c) \quad \hat{CFD} + \hat{BE} = 180^\circ$$

$$d) \quad \hat{EC} = 360^\circ - (\hat{BLD} + \hat{CFD} + \hat{BE}) \quad \text{por suma de arcos}$$

$$\hat{EC} = 360^\circ - (128^\circ + 180^\circ) \quad \Rightarrow \quad \hat{EC} = 52^\circ$$

$$e) \quad 1m\angle 1 = \frac{\hat{EC}}{2} \quad \text{por ángulo inscrito} \quad : \quad 1m\angle 1$$

$$= \frac{52^\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle 1 = 26^\circ \quad LQQD.$$

Toda perpendicular a una cuerda divide al arco y a la cuerda en partes iguales

$$f) \quad \hat{BE} = \hat{EC} = 52^\circ$$

$$g) \quad \hat{CFD} = 180^\circ + \hat{BE} = \hat{CF} + \hat{FD} \quad :$$

$$= 180^\circ - (52^\circ + 56^\circ) \quad \Rightarrow \quad \hat{FD} = 72^\circ$$

$$h) \quad 1m\angle 3 = \hat{FD} \quad \text{por ángulo central}$$

$$\triangle ODG$$

$$i) \quad 1m\angle OGC = 1m\angle 2$$

$$= 1m\angle 1 + 1m\angle 3 \quad \text{por teorema de ángulo exterior al triángulo}$$

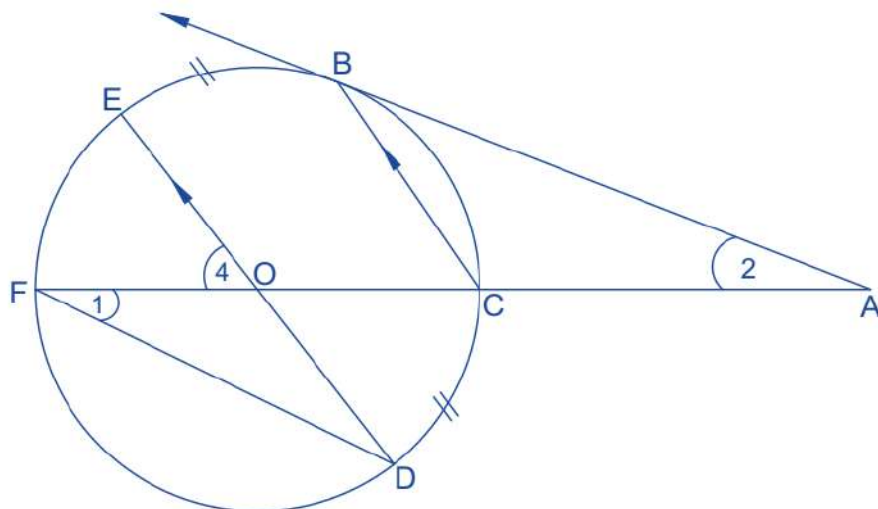
$$1m\angle 2 = 72^\circ + 26^\circ$$

$$1m\angle 2 = 98^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.8.

Dada la figura 5.8. Determinar la medida del ángulo $\angle 1$ y $\angle 2$.
 Conociendo la medida del ángulo $\angle CBA = 40^\circ$, $\overline{AB}$ tang. $\odot(O.R)$ y el
 segmento $\overline{ED}$ es paralelo al segmento $\overline{BC}$.

Figura 5.8



H) $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$
 $\overline{AB}$ tang. $\odot(O.R)$
 $1m\angle CBA = 40^\circ$

T) $1m\angle 1 = ?$
 $1m\angle 2 = ?$

Solución:

a) $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ por hipótesis

b) $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{CD}$

en una circunferencia los arcos comprendidos entre dos rectas paralelas son iguales.

c) $1m\angle CBA = 40^\circ$

$$= \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{por ángulo semi}$$

$$- \text{inscrito} \quad : \quad \overset{\frown}{BC} = 80^\circ$$

d) $\overset{\frown}{EB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$

$$= 180^\circ \quad \text{por suma de arcos} \quad : \quad 2\overset{\frown}{CD} + 80^\circ$$

$$= 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 50^\circ$$

e) $1m\angle EFD = 90^\circ$ por ángulo inscrito en una semi
- circunferencia

f) $1m\angle 4 = 1m\angle EOF = 1m\angle COD$ por opuestos por el vértice

g) $1m\angle 4 = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF} = 50^\circ$ por ángulo central

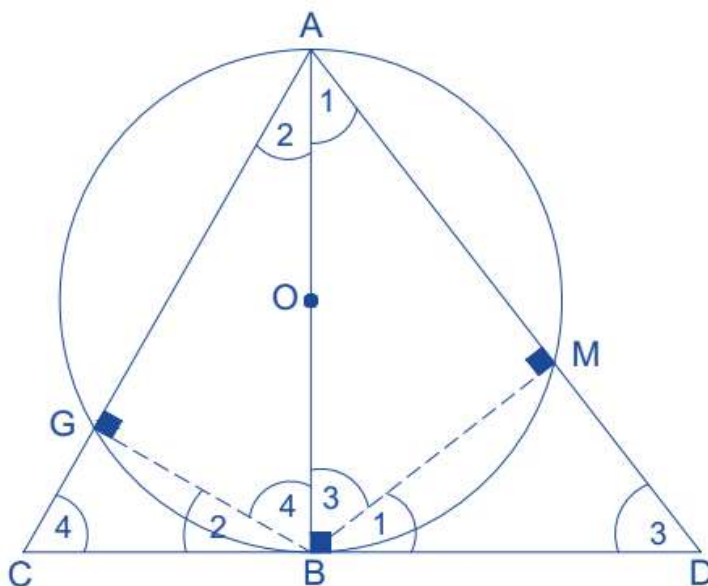
h) $1m\angle 1 = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{50^\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad * \quad 1m\angle 1 = 25^\circ \quad \text{LQQD.}$

i) $1m\angle 2 = \frac{\overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{EB} - \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{50^\circ + 50^\circ - 80^\circ}{2}$
 $1m\angle 2 = 10^\circ \quad \text{LQQD.}$

Ejercicio 5.9. //

Dada la figura 5.9. Determinar $(\overline{AC})(\overline{AG}) = (\overline{AD})(\overline{AM})$.

Figura 5.9



$$T) \quad (\overline{AC})(\overline{AG}) = (\overline{AD})(\overline{AM})$$

Solución:

- a) $\triangle ABD$ rectángulo por hipótesis
 - b) $\overline{BM}$ = cuerda por construcción
 - c) $m\angle AMB = 90^\circ$ ángulo inscrito en una semi
— circunferencia
- $\triangle ABD \approx \triangle ABM$ rectángulos

$$d) \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AM} \quad (d *)$$

e) ΔABC rectángulo por hipótesis

f) $\overline{BG}$ = cuerda por construcción

g) $1m\angle AGB = 90^\circ$ ángulo inscrito en una semi
– circunferencia

$\Delta ABC \approx \Delta AGB$ rectángulos

$$h) \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AG} \quad (h *)$$

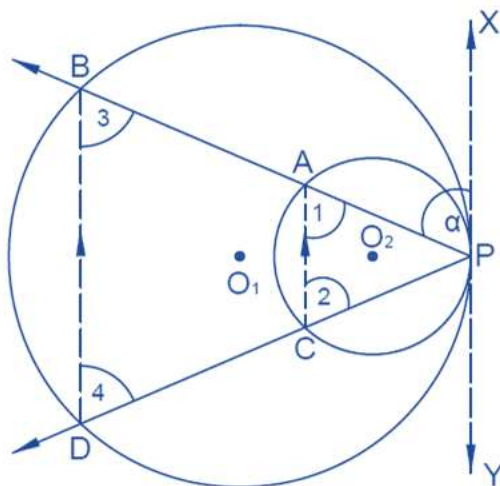
$$(d *) = (h *)$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{AM} = \overline{AC} \cdot \overline{AG} \quad LQQD$$

Ejercicio 5.10. ///

Demostrar que $(\overline{PB})(\overline{PC}) = (\overline{PA})(\overline{PD})$

Figura 5.10



$$T) \quad (\overline{PB})(\overline{PC}) = (\overline{PA})(\overline{PD})$$

Solución:

a) $\theta(O_1, R_1) \wedge \theta(O_2, R_2)$ tangentes interiores por hipótesis

b) "P" punto de tangencia por hipótesis

c) $BD \wedge AC$ cuerdas auxiliares por construcción

d) $\overleftrightarrow{XY}$ tangente por construcción

e) $1m\angle\alpha = \frac{\widehat{AP}}{2}$ por ángulo semi – inscrito $\theta(O_1, R_1)$

f) $1m\angle\alpha = \frac{\widehat{BP}}{2}$ por ángulo semi – inscrito $\theta(O_2, R_2)$

(e) = (f)

$$\frac{\widehat{AP}}{2} = \frac{\widehat{BP}}{2} \Rightarrow \widehat{AP} = \widehat{BP}$$

g) $1m\angle 4 = \frac{\widehat{BP}}{2}$ por ángulo inscrito $\theta(O_2, R_2)$

h) $1m\angle 2 = \frac{\widehat{AP}}{2}$ por ángulo inscrito $\theta(O_1, R_1)$

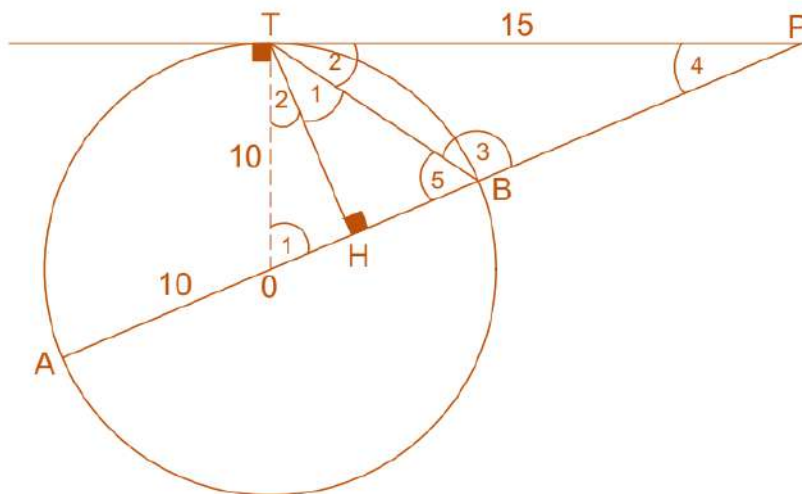
$$i) \triangle ACP \approx \triangle BDP \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{CP}{DP}$$

$$AP \cdot DP = CP \cdot BP \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 5.11. ///

Determinar las medidas de los segmentos TH y TB , sabiendo que el segmento PT es tangente a la circunferencia $\theta(O, R)$.

Figura 5.11



H) PT tang. $\theta(O, R)$

T) $TH = ?$

$TB = ?$

Solución:

a) $OT \perp PT$ por teorema

b) $\triangle OTP$ rectángulo

c) $1m\angle 1 = \overset{\frown}{TB}$ por ángulo central

d) $1m\angle 2 = \frac{\overset{\frown}{TB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{TB} = 2m\angle 2$

$$\Delta OTH \approx \Delta OTP$$

$$e) \quad \overline{OP}^2 = OT^2 + TP^2 \quad \text{por Pitágoras en el } \Delta OTP$$

$$OP = \sqrt{(10u)^2 + (15u)^2}$$

$$OP = 18.03u$$

$$f) \quad OP = OB + BP = R + BP = 10u + BP = 18.03u$$

$$BP = 8.03u$$

$$\Delta OTP \approx \Delta THP$$

$$g) \quad \frac{OT}{TH} = \frac{OP}{TP}$$

$$TH = \frac{OT \cdot TP}{OP} = \frac{(10u)(15u)}{(18.03u)}$$

$$* \quad TH = 8.3u \quad LQQD.$$

$$\Delta OTP$$

$$h) \quad \text{Sen } \angle 4 = \frac{OT}{OP} = \frac{10u}{(10u + 8.03u)}$$

$$1m\angle 4 = 33.68^\circ$$

$$\Delta TBP$$

$$i) \quad TB^2 = TP^2 + PB^2 - 2(TP)(PB) \cos \angle 4$$

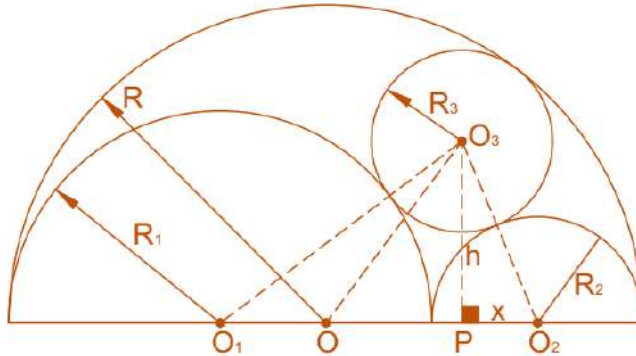
$$TB^2 = (15u)^2 + (8.03u)^2 - (2)(10u)(8.03u) \cos 33.68^\circ$$

$$TB = 9.43u \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.12. ///

Dada la figura 5.12. Determinar la medida de R_3 . Conociendo $R_1 = 2R_2$ y $R = 10 u$.

Figura 5.12



H) $R_1 = 2R_2$

$R = 10 u$

T) $R_3 = ?$

Solución:

En la $\theta(O, R)$

a) $2R = 2R_1 + 2R_2 \Rightarrow R = R_1 + R_2$

b) $2R = 3R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{2R}{3} = \frac{(20u)}{3}$

$R_1 = 6.666u$

c) $2R = 6R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{2R}{6} = \frac{(10u)}{3}$

$R_2 = 3.333u$

d) $(R_1 + R_3)^2 = h^2 + (3R_2 - x)^2$ por Pitágoras en el $\Delta O_1 O_3 P$

e) $(6.666u)^2 + (2)(6.666)(R_3) + (R_3)^2 = h^2 + 100 - 20x + x^2$

f) $(R_3 + R_2)^2 = h^2 + x^2$ por Pitágoras en el $\Delta O_3 O_2 P$

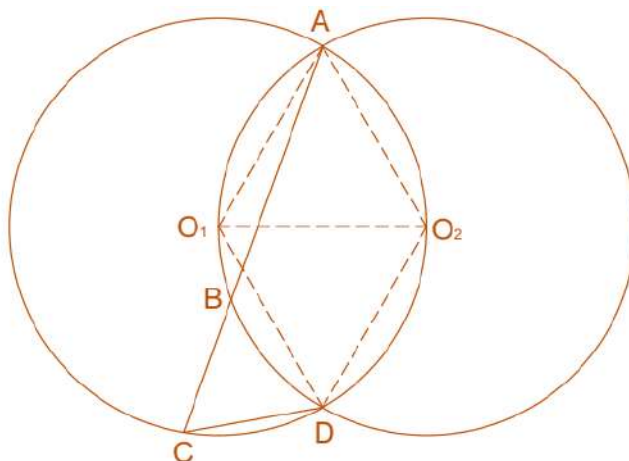
- g) $R_3^2 + (2)(3.333)(R_3) + (3.333u) = x^2 + h^2$
h) $(R - R_3)^2 = h^2 + (R - R_2 - x)^2$ por Pitágoras en el ΔO_3QP
i) $(100u - (2)(10u)(R_3) + R_3^2 = h^2 + (6.666)^2 - (2)(6.666)(x) + x^2$
(e) - (g)
j) $20x + 6,666R_3 = 66.666$
(e) - (h)
k) $33.333uR_3 + 6.666x = 111u$

$$x = \frac{111u - 33,333R_3}{6,666} \quad (k *)$$
(g) - (h)
l) $13.333u + 13.333R_3 + 44,444 = 0$
(k *) en (j)
m) $(20)\left(\frac{111u - 33,333R_3}{6,666}\right) + 6,666R_3 = 66.666$
 $R_3 = 2,853 \text{ u } \text{ LQQD.}$

Ejercicio 5.13. ///

Dada la figura 5.13. Demostrar que ΔCDB es equilátero.

Figura 5.13



T) ΔCDB equilátero

Solución:

a) $\theta(O_1, R) \wedge \theta(O_2, R)$ son iguales por hipótesis

b) $AO_2:O_2B:BO_1$ cuerdas auxiliares por construcción

c) $AO_1 = O_1D = DO_2 = O_2A = R$

d) $\triangle AO_1O_2 : \triangle O_1DO_2$ son equiláteros por construcción
 $\theta(O_2, R)$

$$\begin{aligned} \text{e) } 1m\angle AO_1D &= 1m\angle ABD = \frac{\overset{\frown}{AKD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AKD}}{2} = \frac{240^\circ}{2} \\ &= 120^\circ \quad \text{por ángulo inscrito} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \overset{\frown}{AO_2D} &= 120^\circ \\ \theta(O_1, R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } 1m\angle ACD &= \frac{\overset{\frown}{AO_2D}}{2} = \frac{120^\circ}{2} \quad \Rightarrow \quad 1m\angle ACD = 60^\circ \quad (g *) \\ \triangle CDB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } 1m\angle ABD &= 1m\angle BCD \\ &\quad + 1m\angle BDC \quad \text{por teorema de ángulo exterior al } \triangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } 1m\angle ABD - 1m\angle BCD &= 1m\angle BDC \\ 1m\angle BDC &= 120^\circ - 60^\circ \quad \Rightarrow \quad 1m\angle BDC = 60^\circ \quad (i *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } 1m\angle CBD + 1m\angle BCD + 1m\angle BDC \\ &= 2\angle R \quad \text{teorema fundamental del } \triangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } 1m\angle CBD &= 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ \quad \Rightarrow \quad 1m\angle CBD \\ &= 60^\circ \quad (k *) \end{aligned}$$

$$(k *) = (i *) = (g *)$$

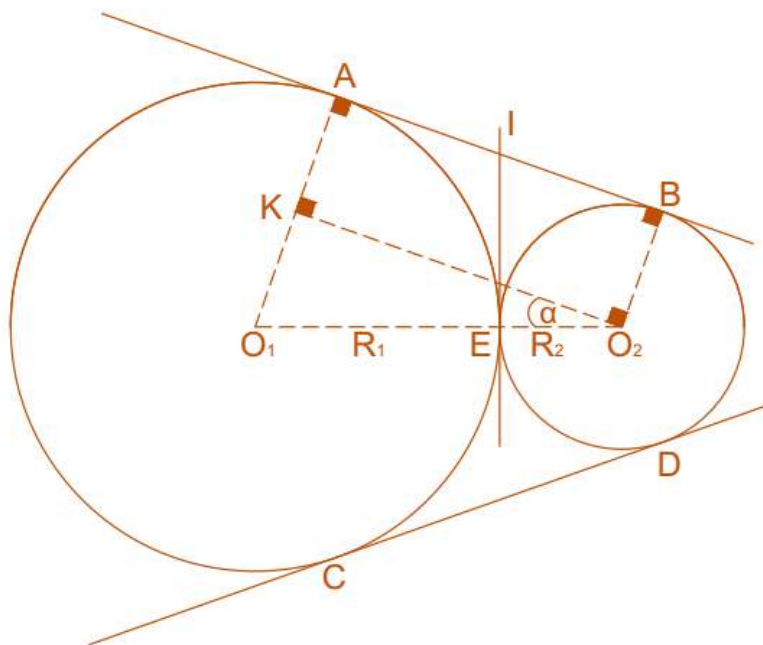
$$\text{l) } 1m\angle CBD = 1m\angle BCD = 1m\angle BDC = 60^\circ$$

$\triangle CDB$ es equilátero LQQD.

Ejercicio 5.14. //

Con relación a la figura 5.14. Determine $\overset{\cap}{EB}$. Conociendo $R_1 = 2R_2$,
 $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EI}$ son tangentes comunes.

Figura 5.14



H) $R_1 = 2R_2$

$\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{AB}$ tangentes comunes

$\overleftrightarrow{EI}$ tangente común

T) $\overset{\cap}{EB} = ?$

Solución:

a) $AO_1 \perp AB$ por construcción

b) $AO_2 \perp AB$ por construcción

$$AO_1 \parallel BO_2$$

$$\Delta O_1KO_2 \text{ rectángulo por construcción}$$

c) $AO_1 = AK + KO_1$ suma de segmentos

$$O_1K = R_1 - R_2$$

d) $1m\angle EO_2K = 1m\angle \alpha$

e) $\text{Sen}\angle \alpha = \frac{KO_1}{O_1O_2} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2R_2 - R_2}{2R_2 + R_2} = \frac{1}{3}$

d) $1m\angle \alpha = 19.47^\circ$

$$\theta(O_2, R_2)$$

e) $1m\angle EO_2B = 1m\angle \alpha + 1\angle R = 19.47^\circ + 90^\circ$

$$1m\angle EO_2B = 109.47^\circ \quad \text{ángulo central}$$

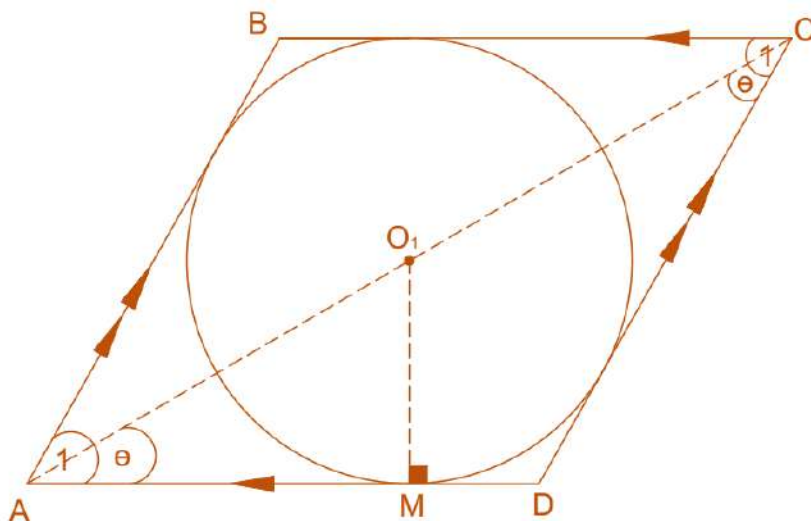
f) $1m\angle EO_2B = \overset{\frown}{EB}$ por definición

$$\overset{\frown}{EB} = 109.47^\circ \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.15. ///

Determine la medida de R_1 en función de a . Sabiendo que $AB = BC = CD = AD = a$ y la medida del ángulo $\angle BAD = 53^\circ$.

Figura 5.15



H) $AB = BC = CD = AD = a$

$1m\angle BAD = 53^\circ$

T) $R_1 = ? f(a)$

Solución:

ABCD romboide por hipótesis gráfica

a) $1m\angle BAD = 1m\angle BCD = 1m\angle 1 = 53^\circ$ por hipótesis

b) *AC bisectriz del $\angle BAC$*

c) $1m\angle 1 = 2m\angle \theta \Rightarrow 1m\angle \theta = 26.5^\circ$

$\triangle ACD$

$$d) \quad 1m\angle ADC = 180^\circ - 2m\angle \theta \quad \Rightarrow \quad 1m\angle ADC = 127^\circ$$

$$e) \quad AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$- (2)(AD)(DC) \cos \angle ADC \quad \text{ley del coseno}$$

$$AC^2 = (a)^2 + (a)^2 - (2)(a)(a) \cos 127^\circ \quad \Rightarrow \quad AC = 1.79a$$

$$AC = 2AO = 2OC = 1.79a$$

$$AO = OC = 0.895a$$

$$f) \quad OM = R_1$$

$R_1 \perp AD$ propiedad de la tangente con respecto al radio

$\triangle AOM$ rectángulo por construcción

$$g) \quad \text{Sen } \angle \theta = \frac{R_1}{OM} \quad \Rightarrow \quad R_1 = (\text{Sen } 26.5^\circ)(0.895a)$$

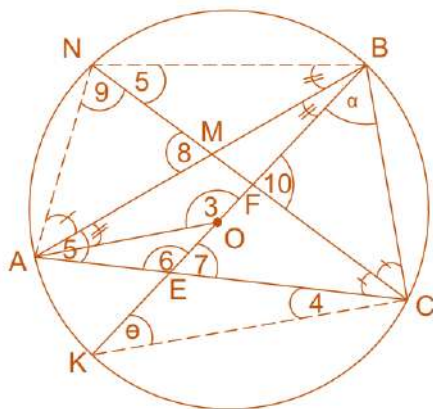
$$R_1 = 0.4a \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.16. ///

Determinar la medida de los segmentos AE, MB, EB, MF y MN.

Sabiendo que $R = 5u$, $BC = 6u$ y $AB = 9u$.

Figura 5.16



$$H) \quad R = 5u$$

$$BC = 6u$$

$$AB = 9u$$

$$T) \quad AE = ?$$

$$MB = ?$$

$$EB = ?$$

$$MF = ?$$

$$MN = ?$$

Solución:

$$a) \quad KC \text{ por construcción}$$

$$b) \quad \triangle KBC \text{ rectángulo}$$

$$KC^2 = KB^2 - BC^2$$

$$KC^2 = (10u)^2 - (6u)^2 \quad \Rightarrow \quad KC = 8u$$

$$\text{Sen } \angle \vartheta = \frac{6u}{10u} \quad \Rightarrow \quad 1m\angle \vartheta = 1m\angle BAC = 1m\angle 5 = 36.87^\circ$$

$$1m\angle \alpha = 90^\circ - 36.87^\circ \quad \Rightarrow \quad 1m\angle \alpha = 53.13^\circ$$

$$c) \quad \theta(o, R)$$

$$1m\angle \alpha = \frac{\overset{\cap}{KC}}{2} = \text{por ángulo inscrito} : \overset{\cap}{KC} \\ = 106.26^\circ$$

$$d) \quad \triangle AOB \text{ isósceles}$$

$$\text{Cos } \angle 2 = \frac{OA^2 + AB^2 - OB^2}{(2)(OA)(AB)} = \frac{(9u)^2}{(2)(5u)(9u)}$$

$$1m\angle 2 = 1m\angle ACK = 1m\angle 4 = 25.84^\circ$$

$$1m\angle 3 = 180^\circ - 2m\angle 2$$

$$= 180^\circ - 2(25.84^\circ) : \quad 1m\angle 3 = 128.32^\circ$$

$$1m\angle 3 = \overset{\frown}{\angle ANB} = 2\overset{\frown}{\angle AN} = 2\overset{\frown}{\angle NB} = 128.32^\circ \quad \text{por ángulo central}$$

$$1m\angle 1 = \frac{\overset{\frown}{AN}}{2} = \frac{\overset{\frown}{NB}}{2} = \frac{64.16^\circ}{2} \quad : \quad 1m\angle 1 = 32.08^\circ$$

e) $\triangle ABE$

$$\begin{aligned} 1m\angle 6 &= 180^\circ - 1m\angle 5 - 1m\angle 2 \\ &= 180^\circ - 36.87^\circ - 25.84^\circ \quad : \quad 1m\angle 6 \\ &= 117.29^\circ \quad : \quad 1m\angle 7 = 62.71^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Sen } \angle 6}{AB} = \frac{\text{Sen } \angle 2}{AE} \Rightarrow AE = \frac{(\text{Sen } 25.84^\circ)(9u)}{\text{Sen } 117.29^\circ}$$

$$AE = 4.41u \quad LQQD.$$

f) $\triangle EBC$

$$\frac{\text{Sen } \angle ACB}{EB} = \frac{\text{Sen } \angle 7}{BC} \Rightarrow EB = \frac{(\text{Sen } 64.16^\circ)(6u)}{\text{Sen } 62.71^\circ}$$

$$EB = 6.1u \quad LQQD.$$

g) $\triangle MBC$

$$\begin{aligned} 1m\angle 8 &= 180^\circ - 1m\angle 2 - 1m\angle \alpha - 1m\angle \\ &= 180^\circ - 25.84^\circ - 53.13^\circ - 32.08^\circ \quad : \quad 1m\angle 8 \\ &= 68.95^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Sen } \angle 8}{BC} = \frac{\text{Sen } \angle 1}{MB} \Rightarrow MB = \frac{(\text{Sen } 32.08^\circ)(6u)}{\text{Sen } 68.95^\circ}$$

$$MB = 3.41u \quad LQQD.$$

$$h) \quad AB = AM + MB \quad : \quad AM = 9u - 3.41u = 5.58u$$

$$\triangle ANM$$

$$i) \quad 1m\angle 9 = 180^\circ - 1m\angle 1 - 1m\angle 8$$

$$= 180^\circ - 32.08^\circ - 68.95^\circ \quad : \quad 1m\angle 9 = 78.97^\circ$$

$$\frac{\text{Sen } \angle 1}{NM} = \frac{\text{Sen } \angle 9}{AM} \Rightarrow NM = \frac{(\text{Sen } 32.08^\circ)(5.58u)}{\text{Sen } 78.97^\circ}$$

$$NM = 3.02u$$

j) ΔFBC

$$1m\angle 10 = 180^\circ - 1m\angle \alpha - 1m\angle 1 = 180^\circ - 53.13^\circ - 32.08^\circ$$

$$1m\angle 10 = 94.79^\circ$$

$$\frac{\text{Sen } \angle 10}{BC} = \frac{\text{Sen } \angle \alpha}{FB} \Rightarrow FB = \frac{(\text{Sen } 53.13^\circ)(6u)}{\text{Sen } 94.79^\circ}$$

$$FB = 4.82u$$

k) ΔNFB

$$\frac{\text{Sen } \angle 5}{FB} = \frac{\text{Sen } \angle NBF}{NF} \Rightarrow NF = \frac{(\text{Sen } (32.08^\circ + 25.84^\circ))}{\text{Sen } 36.87^\circ} = (5.58u)$$

$$\Rightarrow NF = 6.81u$$

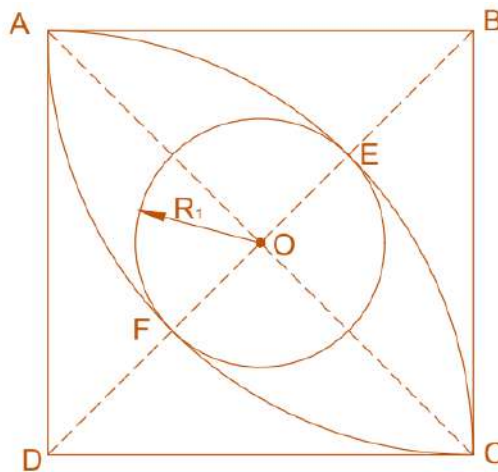
$$MF = NF - NM = 6.81u - 3.02$$

$$MF = 3.8u \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.17. ///

Hallar la medida de R_1 en función de a . Sabiendo $AB = BC = CD = AD = a$.

Figura 5.17



$$H) \quad AB = BC = CD = AD = a$$

$$T) \quad R_1 = ?$$

Solución:

a) $ABCD$ cuadrado por hipótesis

b) $\triangle ABD$ rectángulo

$$DB^2 = AD^2 + AB^2 \quad \text{por pitágoras}$$

$$DB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad : \quad DB = 1.41a$$

c) $BA = BF = AD = a$

$$DB = DF + BF \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$d) \quad DF = DB - BF = 1.41a - a \quad \Rightarrow \quad DF = 0.41a$$

e) $DE = EB = 0.41a$ por simetría

$$f) \quad DB = 2DF + FE$$

$$FE = DB - 2DF = 1.41a - 2(0.41a) \quad \Rightarrow \quad FE = 0.59a$$

$$g) \quad FE = 2R_1$$

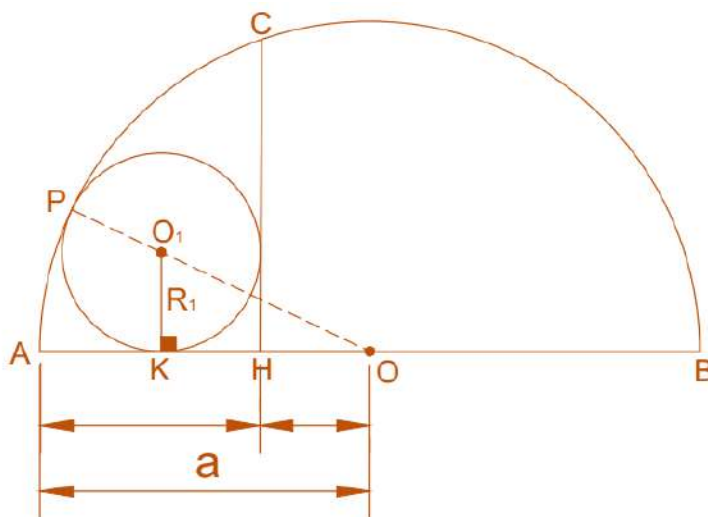
$$R_1 = \frac{0.59a}{2}$$

$$R_1 = 0.29a \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 5.18.

Hallar la medida de R_1 en función de a . Sabiendo $AO = OB = a$ y $AH = 2HO$

Figura 5.18



H) $AO = OB = a$

$AH = 2HO$

T) $R_1 = ?$

Solución:

a) $\triangle O_1KO$ rectángulo por construcción

$O_1O^2 = O_1K^2 + KO^2$ por pitágoras

$(R - R_1)^2 = R_1^2 + (R_1 + HO)^2$

$a = 3HO = PO = R$

$HO = \frac{a}{3}$

$$(a - R_1)^2 = R_1^2 + \left(R_1 + \frac{a}{3}\right)^2$$

$$(9)(a - R_1)^2 = R_1^2 + (3R_1 + a)^2$$

$$b) \quad (9)(a^2 - 2aR_1 + R_1^2) = 9R_1^2 + 9R_1^2 + 6aR_1 + a^2$$

$$9a^2 - 18aR_1 + 9R_1^2 = 18R_1^2 + 6aR_1 + a^2$$

$$9R_1^2 + 24aR_1 - 8a^2 = 0$$

$$R_1 = \frac{-24a \pm \sqrt{(24a)^2 - (4)(9)(-8a^2)}}{(2)(9)} = \frac{-24a \pm \sqrt{576a^2 + 288a^2}}{(18)}$$

$$= \frac{-24a \pm \sqrt{864a^2}}{18} = \frac{-24a \pm 29.4a}{18}$$

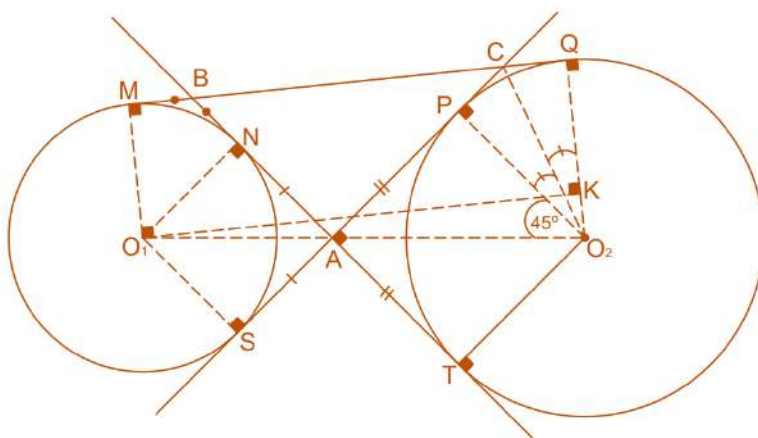
$$R_1 = \frac{-24a + 29.4a}{18}$$

$$R_1 = 0.3a \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.19. ///

Dada la figura 5.19. Determinar la medida del segmento BC. Sabiendo que MQ , BT , CS son tangentes comunes, $R_2 = 8u$ y $R_1 = 6u$

Figura 5.19



H) MQ, BT, CS Tangentes comunes

$$R_2 = 8u$$

$$R_1 = 6u$$

T) $BC = ?$

Solución:

$$\theta(O_1, R_1)$$

$$a) \quad CS = CM \quad : \quad BM$$

$= BN$ por la propiedad de las tangentes exteriores a una circunferencia

$$b) \quad O_1M \perp MC \quad \therefore \quad R_1 \perp MC \quad \text{por teorema}$$

$$c) \quad O_1S \perp SC \quad \therefore \quad R_1 \perp SC$$

El cuadrilátero O_1NAS es un cuadrado por lo tanto: R

$$= O_1N = NA = AS = O_1S = 6 \text{ unidades}$$

$$\theta(O_2, R_2)$$

$$d) \quad O_2P \perp AC \quad \therefore \quad R_2 \perp AC \quad \text{por teorema}$$

$$e) \quad O_2T \perp AT \quad \therefore \quad R_2 \perp AT$$

$$f) \quad O_1K = MQ \quad \text{por construcción}$$

$$g) \quad \Delta O_1NA \text{ rectángulo} \quad \therefore \quad O_1A = \sqrt{(O_1N)^2 + (NA)^2}$$

$$= \sqrt{(6u)^2 + (6u)^2} \quad \Rightarrow \quad O_1A = 8.48u$$

$$\Delta AO_2T \text{ rectángulo} \quad \therefore \quad O_2A = \sqrt{(O_2A)^2 + (PO_2)^2}$$

$$= \sqrt{(8u)^2 + (8u)^2} \quad \Rightarrow \quad O_2A = 11.31u$$

ΔO_1O_2K rectángulo por construcción

$$i) \quad O_1O_2 = O_1A + O_2A = 8.48u + 11.31u \quad \therefore \quad O_1O_2 = 19.79u$$

$$j) \quad BQ = BT$$

$$BC + CQ = BA + AT \quad : \quad BC + CQ$$

$$= BN + NA + AT \quad : \quad BC + CQ = MB + 6u + 8u$$

$$k) \quad BC + CQ - MB = 14$$

$$l) \quad SC = CM$$

$$SA + AP + PC = SC \quad : \quad 6u + 8u + PC = MB + BC$$

$$m) \quad MB + BC - PC = 14$$

$$(k) = (m)$$

$$\begin{aligned} BC + CQ - MB &= MB + BC - PC & \therefore \quad MB = PC = CQ \\ &= 19.69u \end{aligned}$$

$\Delta O_1 O_2 k$ rectángulo por construcción

$$\text{Sen } \angle O_1 O_2 k = \frac{O_1 k}{O_1 O_2} = \frac{19.69}{19.79} \quad \therefore \quad m\angle O_1 O_2 k = 84.23^\circ$$

n) En el trapecioide simétrico $PCQO_2$

$$\begin{aligned} 1m\angle 1 &= \frac{1m\angle O_1 O_2 k - 1m\angle O_1 O_2 P}{2} = \frac{84.23^\circ - 45^\circ}{2} \\ &\Rightarrow \quad 1m\angle 1 = 19.62^\circ \end{aligned}$$

ΔPCO_2 rectángulo por construcción

$$\begin{aligned} o) \quad \text{tag } 19.62^\circ &= \frac{PC}{PO_2} & \therefore \quad PC = (\text{tag. } 19.62^\circ)(8u) \\ &\Rightarrow \quad PC = 2.85u \end{aligned}$$

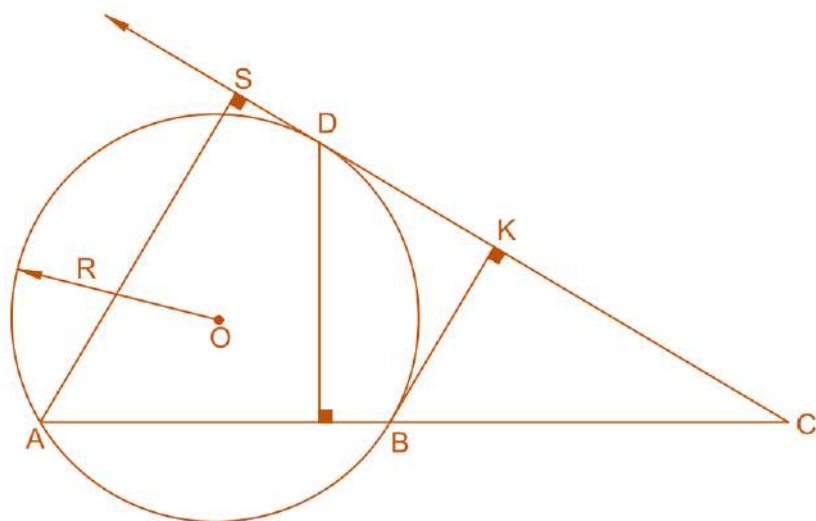
$$\begin{aligned} p) \quad MQ &= MB + BC + CQ & \therefore \quad BC = MQ - MB - CQ \\ BC &= 19.69 - 2.85 - 2.85 \end{aligned}$$

$$BC = 14u \quad LQQD.$$

Ejercicio 5.20. //

Determinar la mitad del segmento HD. Conociendo que la recta CS es tangente a la circunferencia (O, R) , $AB = 12.5u$, $AS = 13.5u$, y $BK = 6u$.

Figura 5.20



H) CS tangente $\theta(O, R)$

$$AB = 12.5u$$

$$AS = 13.5u$$

$$BK = 6u$$

T) $HD = ?$

Solución:

$AS \parallel BK$ por hipótesis

$\triangle ASC \approx \triangle BKC$ rectángulos

$$a) \quad \frac{AS}{BK} = \frac{AC}{BC} = \frac{SC}{KC} \quad \therefore \quad \frac{AS}{BK} = \frac{AC}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{13.5u}{6u} \\ = \frac{AC}{BC}$$

$$BC = \frac{6u}{13.5u} \cdot AC \quad \therefore \quad BC = 0.44(AB + BC) \\ = 0.44(12.5) + 0.44BC \quad \Rightarrow \quad BC = 5.55 + 0.44BC$$

$$b) \quad BC = 9.9u$$

$$c) \quad \triangle DHC \approx \triangle BKC$$

$$\frac{DH}{BK} = \frac{DC}{BC} = \frac{HC}{KC} \quad \therefore \quad \frac{DH}{BK} = \frac{DC}{BC}$$

$$d) \quad DH = (BK) \frac{DC}{BC}$$

$$e) \quad AC = AB + BC \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$AC = 12.5u + 9.9u \quad \therefore \quad AC = 22.41u$$

$$f) \quad DC^2$$

$$= (AC)(BC) \quad \text{relación métrica de la secante y la tangente}$$

$$DC^2 = (22.41u)(9.9u) \quad \Rightarrow \quad DC = 14.89u$$

$$d) \quad DH = (6u) \frac{(14.89u)}{(9.9u)}$$

$$DH = 9u \quad \text{LQPD.}$$



CAPÍTULO 6

Áreas de regiones
rayadas



Capítulo 6

Áreas de regiones rayadas

“Las matemáticas comenzaron a ser una ciencia cuando alguien, probablemente un griego, enunció proposiciones acerca de cualquier cosa o de alguna cosa sin especificar ninguna particularidad. Los griegos fueron los primeros en aplicar proposiciones a la geometría; por ello, la geometría fue la gran ciencia matemática en Grecia.”

— Alfred North Whitehead

Objetivo

Definir, interpretar y aplicar las proposiciones correspondientes que permitan que el lector analice casos de figuras que no tienen un perfil geométrico básico, que sea capaz de aplicar su criterio lógico con la ayuda del álgebra y a trigonometría, para resolver problemas donde se presenten figuras geométricas planas.

Logros de aprendizaje

El lector estará en capacidad de:

- Utilizar los conceptos, teoremas, postulados y propiedades de las figuras geométricas para calcular áreas de regiones rayadas.

- Enunciar y desarrollar las fórmulas para encontrar el área de las regiones rayadas.

6.1 Introducción teórica

Superficie. - Es la extensión en que se consideran dos dimensiones que son longitud y latitud. La superficie se refiere a la “forma”

Área. - Es la medida de una superficie, el área se refiere al “tamaño”.

Área de un rectángulo. - El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

Área de un cuadrado. - El área del cuadrado es igual al lado al cuadrado o a la mitad del cuadrado de su diagonal.

Área del romboide. - El área del romboide es igual al producto de su base por su altura.

Área de un triángulo. - El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.

Área de un triángulo cualquiera en función de sus lados. - El área de un triángulo en términos de sus lados "a", "b", "c", está dada por el teorema de Herón “El área de todo triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y su diferencia con cada lado”.

Área de un triángulo a través de una expresión trigonométrica. - En todo triángulo, el área se puede expresar como el semiproducto de dos lados, por el seno del ángulo comprendido.

Área de un triángulo equilátero en función de su lado. - El área de un triángulo es igual al lado al cuadrado por la raíz cuadrada de tres dividida para cuatro.

Área del triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia inscrita. - El área de un triángulo es igual al producto de su semi - perímetro por el radio de la circunferencia inscrita.

Área de un triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia circunscrita. - El área de un triángulo es igual al producto de sus lados divididos por el cuádruplo del radio de la circunferencia circunscrita.

Área de un triángulo en función del ángulo comprendido. - El área de un triángulo cualquiera es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.

Área del rombo. - El área del rombo es igual al semi - producto de sus diagonales.

Área de un trapezoide. - Es igual al producto de una diagonal por la semi - suma de las perpendiculares trazadas a esta desde los otros dos vértices.

Área del trapecio. - El área del trapecio es igual a la semi - suma de sus bases multiplicada por su altura.

Área de un cuadrilátero. - El área de un cuadrilátero es igual al semiproducto de sus diagonales por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

Área de un polígono regular. - El área de un polígono regular es igual al producto de su semi - perímetro por su altura (apotema).

Área de un polígono cualquiera. - Es igual a la suma de las áreas de los triángulos parciales en los que se puede descomponer el polígono.

Área de un círculo. - El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio. La longitud de una circunferencia es igual al doble de π multiplicado por el radio.

Área de un sector circular. - El área de un sector circular (OMNO) es igual al semi - producto de la longitud de su arco por el radio. Un sector circular de 1° de amplitud tendrá un área 360 veces menor, es decir, por ser “n” veces mayor que el área de un sector circular de 1° de amplitud.

Área del segmento circular. - El área de segmento circular es igual al área del sector circular que abarca el mismo arco menos el área del triángulo formado por los radios que lo delimitan y la cuerda correspondiente.

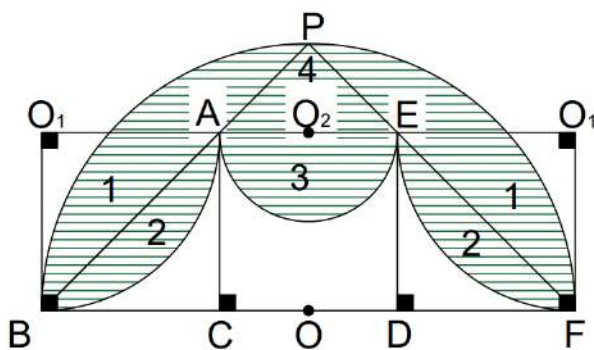
Área de la corona circular. - El área de una corona circular de radios R, r es igual al producto de π por la diferencia de los cuadrados de dichos radios.

6.2 Ejercicios resueltos de área de regiones rayadas

Ejercicio 6.1.

Determine el área de la región rayada de la figura 6.1.

Figura 6.1



- H) $O_1BAC \rightarrow$ cuadrado
 $AECD \rightarrow$ cuadrado

$EO_1DF \rightarrow \text{cuadrado}$

$$\overline{O_1B} = 8m$$

T) $A_{iiii} = ?$

Solución:

$\overline{BP} \wedge \overline{PF}$ cuerdas por construcción

$\overline{OB} = \overline{OF} = \text{radio de la } \odot (O, R) = 12m = R$

a) $\overline{O_1A} = \overline{O_1E} = R_1 = 8m$

b) $\overline{O_2A} = \overline{O_2E} = R_2 = 4m$

c) $A_{iiii} = 2A_1 + 2A_2 + \text{Area } \frac{\odot}{2} (O_2, R_2) + \text{Área } \Delta APE$

d) $A_1 = 0.5R^2 \left(\frac{(\pi)(1m\angle POB)}{180^\circ} - \text{Seno } \angle POB \right)$

$$A_1 = 0.5R^2(1.57 - 1) \Rightarrow A_1 = 0.285R^2$$

$$= (0.285)(12m)^2$$

e) $A_1 = 41.09m^2$

f) $A_2 = 0.5R_1^2 \left(\frac{(\pi)(1m\angle AO_1B)}{180^\circ} - \text{Sen. } \angle AO_1B \right)$

$$A_2 = 0.5(8m)^2(1.57 - 1) \Rightarrow A_2$$

$$= 18.24m^2 \quad (f *)$$

g) $A_3 = \pi \frac{R_2^2}{2} \Rightarrow A_3 = 25.13m^2 \quad (g *)$

h) $A_4 = \frac{(\overline{AE})(\overline{O_2P})}{2} = \frac{(8m)(4m)}{2} \Rightarrow A_4 = 16m^2 \quad (h)$

(e), (f *), (g *), (h) en (c)

$$A_{iii} = 2(41.09m^2) + 2(18.24m^2) + 25.13m^2 + 16m^2$$

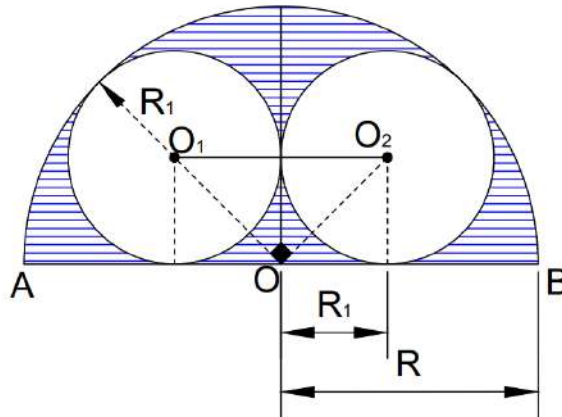
$$A_{iii} = (82.18 + 36.48 + 25.13 + 16)m^2$$

$$A_{iii} = 159.79m^2 \quad LQQD.$$

Ejercicio 6.2.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.2.

Figura 6.2



H) $\overline{AO} = R$

T) $A_{\text{iiii}} = ? \quad f(R)$

Solución:

a) $\overline{O_1P} = R_1 \rightarrow \text{por construcción.}$

b) $\overline{OC} = R \rightarrow \text{por construcción}$

ΔO_1OO_2 rectángulo

c) $\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1O}^2 + \overline{O_2O}^2 \quad \text{por Pitágoras} \quad \overline{O_1O} = \overline{O_2O} = x$

$$(2R_1)^2 = x^2 + x^2 \quad \Rightarrow \quad 4R_1^2 = 2x^2$$

$$x = R_1\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1.414R_1$$

d) $R = R_1 + x = R_1 + 1.414R_1 \quad \Rightarrow \quad R = 2.414R_1$

$$R_1 = 0.4142R$$

$$e) \quad A_{iiii} = \frac{A \otimes (O, R_1)}{2} - 2A \otimes (O_1, R_2)$$

$$f) \quad A_{iii} = \frac{(\pi)R^2}{2} - (2)(\pi)(R_1^2)$$

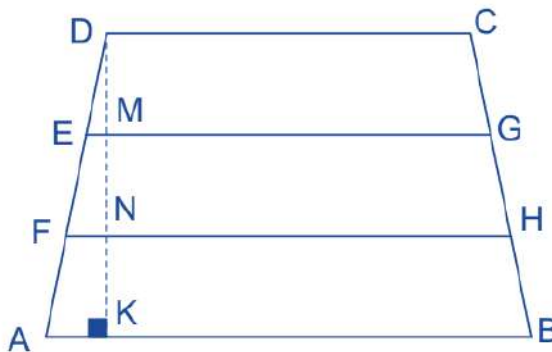
$$A_{iii} = \frac{(\pi)R^2}{2} - (2)(\pi)(0.4142R)^2 = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - (2\pi)(0.1716) \right)$$

$$A_{iiii} = 0.4918R^2 \quad LQQD.$$

Ejercicio 6.3.

Las bases de un trapecio miden 8m y 6m y su altura 5m, se trazan dos paralelas a las bases que dividen en tres partes iguales a los otros dos lados. Calcular las áreas de los tres trapecios parciales que se forman.

Figura 6.3



$$H) \quad AB = 8m$$

$$DC = 6m$$

$$DK = 5m$$

Solución:

a) $EG \parallel DC \parallel AB \parallel FH$ por hipótesis

b) $DE = EF = FA$ por teorema de Thales

c) $\overline{CG} = \overline{GH} = \overline{AD}$ por teorema de Thales

d) $\overline{DM} = \overline{MN} = \overline{NK}$ " " " "

TRAPECIO DFHC

f) E punto medio de $\overline{FD}$

G $\overline{HC}$

g) $EG =$ mediana del trapecio DFHC

h) $EG = \frac{FH + DC}{2}$ por definición de mediana del trapecio

TRAPECIO EGAD

i) $F =$ punto medio de EA : $H =$ punto medio de GB

j) $FH =$ mediana del trapecio EGDA

k) $FH = \frac{AB + EG}{2}$

(h) en (l)

$$l) \quad FH = \frac{AB}{2} + \frac{FH + DC}{4} = \frac{8m}{2} + \frac{FH}{4} + \frac{6m}{4} \quad \Rightarrow \quad FH$$

$$= 7.33m \quad (m *)$$

(m *) en (h)

m) $EG = \frac{(7.33 + 6)m}{2} \quad EG = 6.66m$

ÁREA DEL TRAPECIO ADCB

n) $A_1 = \frac{(AB + DC)}{2} * DK = \frac{(8m + 6m)}{2} * 5m$

$A_1 = 35m^2$ LQQD

ÁREA DEL TRAPECIO DCGE = A_2

$$o) \quad A_2 = \frac{(EG + DC)}{2} * DK_2 = \frac{(6.66m + 6m)}{2} * 1.67m$$

$$A_2 = 10.57m^2 \quad LQQD$$

ÁREA DEL TRAPECIO EGHF = A_3

$$p) \quad A_3 = \frac{(FH + EG)}{2} * \overline{K_1K_2} = \frac{(7.33m + 6.66m)}{2} * 1.67m$$

$$A_3 = 11.68m^2 \quad LQQD.$$

ÁREA DEL TRAPECIO FHBA = A_4

$$q) \quad A_4 = \frac{(AB + FH)}{2} * KK_1 = \frac{(8m + 7.33m)}{2} * 1.67m$$

$$A_4 = 12.8m^2 \quad LQQD$$

Ejercicio 6.4.

Calcular el radio R de la figura 6.4, sabiendo que:

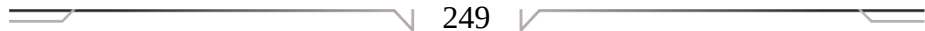
$$H) \quad A_{iii} = 100m^2$$

$$\overline{AB} \text{ tang.}$$

$$3R_1 = R$$

$$T) \quad R = ?$$

249



-
- 249

249

- 249

249

$$1m\angle OO_1T = 90^\circ - 1m\angle 1 \Rightarrow 1m\angle 2 = 2^\circ$$

$$1m\angle KO_1B = 1m\angle OO_1T + 90^\circ = 2^\circ + 90^\circ \Rightarrow 1m\angle KO_1B = 92^\circ$$

ΔO_1TO rectángulo

$$OO_1^2 = OT^2 + TO_1^2 \quad \text{por Pitágoras} \Rightarrow \overline{TO_1}^2 = \overline{OO_1}^2 - \overline{OT}^2$$

$$TO_1^2 = (20R)^2 - (0.666R)^2 \Rightarrow TO_1 = 19.98R = \overline{AB}$$

$$A_1 = \overline{AB} * \overline{TA} \rightarrow \text{por definición} \Rightarrow A_1 = [(19.98)(0.333)]R^2 \Rightarrow A_1 = 6.65R^2 \quad (j)$$

$$A_2 = \frac{(OT)(TO_1)}{2} = \frac{(0.666R)(19.98R)}{2} \Rightarrow A_2 = 6.66R^2 \quad (k)$$

$$A_3 = \frac{(\pi)R^2 * m\angle 1}{360^\circ} = \frac{(\pi)R^2(88^\circ)}{360^\circ} \Rightarrow A_3 = 0.7679R^2 \quad (l)$$

$$A_4 = \frac{(\pi)R_1^2 * m\angle 2}{360^\circ} = \frac{(\pi)(0.33R^2)(92^\circ)}{360^\circ} \Rightarrow A_4 = 0.087R^2 \quad (m)$$

$(j), (k), (l), (m)$ en (i)

$$100m^2 = A_{iii} = A_1 + A_2 - A_3 - A_4$$

$$A_{iii} = (6.65R^2) + (6.66R^2) - (0.7679R^2) - (0.087R^2) = 12.455R^2$$

$$100m^2 = 12.455R^2 \quad \therefore R^2 = \frac{100m^2}{12.455}$$

$R = 2.83m$ LQQD.

Ejercicio 6.5.

Calcular el radio R de la figura 6.5 y el área de la región rayada, sabiendo que:

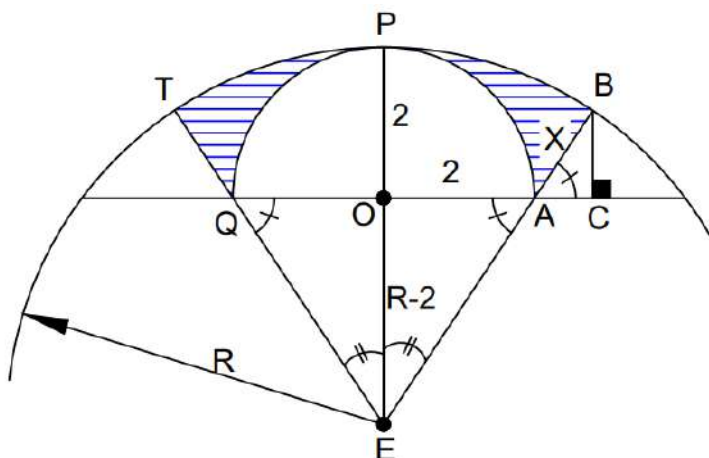
H) $AC = 0.8$ unidades

$$OA = 2 \text{ unidades} = R_1$$

$$\overline{OP} = R$$

T) $A_{iiiiii} = ?$

$R = ?$

Figura 6.5

Solución:

ΔAOE rectángulo

$$AE^2 = OA^2 + OE^2$$

$$a) \quad (R - X)^2 = (2)^2 + (R - 2)^2$$

Descomponemos la figura en superficies parciales

$$j) A_1 = \frac{\pi R^2 (m\angle QEA)}{360^\circ} = \frac{(\pi)(4.65)^2(74^\circ)}{360^\circ}$$

$$A_1 = 13.96 \text{ unidades}^2$$

$$k) A_2 = \frac{(\pi)(R_1^2)}{2} = \frac{(\pi)(2)^2}{2}$$

$$A_2 = 6.28 \text{ unidades}^2$$

$$l) A_3 = \frac{QA \cdot OE}{2} = \frac{(4)(2.65)}{2}$$

$$A_3 = 5.3 \text{ unidades}^2$$

(j), (k), (l) en (b)

$$A_{iii} = (13.95 - 6.28 - 5.3) \text{ unidades}^2$$

$$A_{iii} = 2.36 \text{ unidades}^2 \quad \text{LQQD}$$

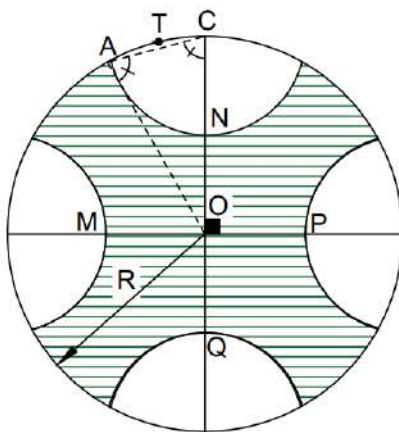
Ejercicio 6.6.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.6 en función del radio R, sabiendo que:

H) M, N, P, Q puntos medios de los radios

T) $A_{iii} = ? f(R)$

Figura 6.6



Solución:

$$R = 2R_1 \quad \text{por hipótesis}$$

$$R = \overline{ON} + \overline{NC} \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$\Delta.AOC \rightarrow \text{isósceles por construcción}$$

$$\overline{AO} = \overline{OC} = R$$

$$\text{Descomponemos el sector circular } ATCOA = A_0$$

$$a) \quad A_{iii} = A_0 - 8A_3$$

$$a *) \quad \text{Área del sector circular } ATCOA = A_0$$

$$b) \quad A_3 = A_1 + A_2$$

$$c) \quad \text{Área del segmento circular } ATCA = A_1$$

$$d) \quad \text{Área del sector circular } ACNA = A_2$$

$$\overline{AC} = R_1 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = (0.5)R$$

$$e) \quad \overline{AC}^2$$

$$= \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2$$

$$- 2(\overline{AO})(\overline{OC}).\cos\angle.AOC \quad \text{ley del coseno en el } \Delta.AOC$$

$$\cos.\angle AOC = \frac{\overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{AC}^2}{2(\overline{AO})(\overline{OC})} = \frac{R^2 + R^2 - (0.5)^2 R^2}{2(R)(R)} = 0.875$$

$$1m\angle AOC = 29^\circ$$

$$2m\angle ACO + 1m\angle AOC = 180^\circ \quad T.F.\Delta$$

$$1m\angle ACO = \frac{180^\circ - 29^\circ}{2} = 75.5^\circ$$

$$1m\angle 1 = 75.5^\circ$$

$$A_1 = \frac{1}{2}R^2 \left[\frac{(\pi)(29^\circ)}{180^\circ} - \text{Sen } 29^\circ \right]$$

$$f) \quad A_1 = 0.01066R^2$$

$$A_2 = \frac{(\pi)(R_1^2)(m\angle 75.5^\circ)}{360^\circ} = \frac{(\pi)(0.5R)^2(75.5^\circ)}{360^\circ}$$

$$g) A_2 = 0.1647R^2$$

(f), (g) en (b)

$$h) A_3 = (0.01066 + 0.1647)R^2$$

$$A_3 = 0.175R^2$$

(h) en (a)

$$A_{iiii} = (\pi)(R^2) - (8)(0.175R^2)$$

$$A_{iii} = 1.738R^2 \quad LQQD.$$

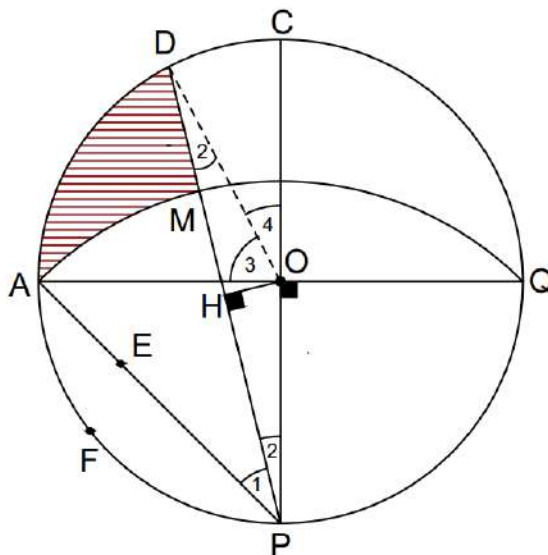
Ejercicio 6.7.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.7 en función del radio R, sabiendo que:

$$H) \hat{AD} = 60^\circ$$

$$T) A_{iii} = ? f(R)$$

Figura 6.7



Solución:

$$a) \quad PA = \overline{PM} = \overline{PQ} = R_1$$

$$\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OP} = R$$

$$AD = R_1 = \text{cuerda por construcción.}$$

$$DO = R \Rightarrow \text{por construcción.}$$

Descomposición del semicírculo CDAPOC

$$A_{iii} = A_0 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

$$A_0 = \text{Área del semi-círculo } \theta(O, R)$$

$$A_1 = \text{Área del segmento circular .AEPFA}$$

$$A_2 = \text{Área del sector circular AMPA}$$

$$A_3 = \text{Área del triángulo .DOP}$$

$$A_4 = \text{Área del sector circular DCOD}$$

$$b) \quad A_1 = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} - \text{Seno. } 90^\circ \right) \Rightarrow A_1 = 0.285 R^2$$

$$c) \quad A_2 = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot m\angle APM}{360^\circ}$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 45^\circ$$

$$1m\angle 3 = \text{ángulo central} = \text{arco } AD = 60^\circ$$

$$1m\angle DOP = 1m\angle 3 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ \Rightarrow 1m\angle DOP = 150^\circ$$

$$\Delta .DOP \text{ isósceles} \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OP} = R$$

$$1m\angle .ODP = 1m\angle .OPD = 1m\angle 2$$

$$\Leftrightarrow 2m\angle 2 + 1m\angle .DOP = 180^\circ \Rightarrow 1m\angle 2 = 15^\circ$$

$$1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 45^\circ \Rightarrow 1m\angle 1 = 30^\circ$$

ΔAOP rectángulo

$$\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{OP}^2 \Rightarrow R_1^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow R_1^2 = 1.4142R$$

$$c *) \quad A_2 = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot m\angle APM}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot (2R^2)(30^\circ)}{360^\circ} \Rightarrow A_1 \\ = 0.524R^2$$

$\Delta.OHP \rightarrow \text{rectángulo}$

$$\text{Sen. } \angle 2 = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OP} \cdot \text{Sen. } 15^\circ \Rightarrow OH \\ = 0.258R$$

$$A_3 = 2 \text{ areas del } \Delta OHP = 2 \left[\frac{(OH)(HP)}{2} \right] = (OH)(HP)$$

$$\frac{\text{Sen. } 150^\circ}{\overline{DP}} = \frac{\text{Sen. } 15^\circ}{\overline{OD}} ; \quad \overline{DP} = \frac{(0.5)(R)}{0.258} \Rightarrow \overline{DP} \\ = 1.932R$$

$$\frac{\overline{DP}}{2} = \overline{DH} = \overline{HP} = 0.966R$$

$$d) \quad A_3 = (0.258R)(0.966R) \Rightarrow A_3 = 0.25R^2$$

$$e) \quad A_4 = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} \Rightarrow A_4 = 0.261R^2$$

$$f) \quad A_0 = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \Rightarrow A_0 = 1.57R^2$$

$(b), (c *), (d), (e), (f) \text{ en } (a)$

$$A_{iii} = A_a - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

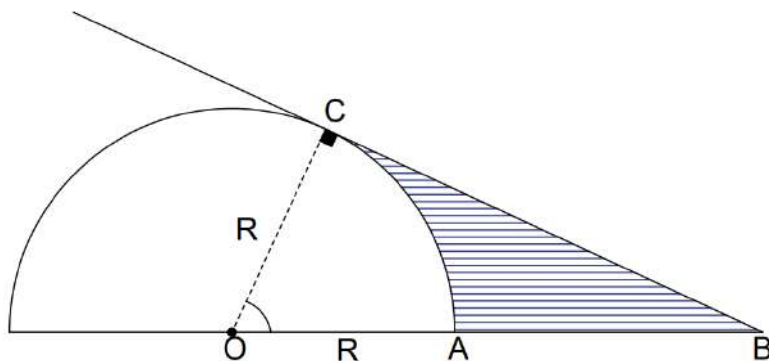
$$A_{iii} = 1.57R^2 - (0.285R^2 + 0.524R^2 + 0.25R^2 + 0.261R^2)$$

$$A_{iii} = 0.25R^2 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 6.8.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.8.

Figura 6.8



$$H) \quad \overline{BC} = 20m$$

$$\overline{BA} = 10m$$

$$T) \quad A_{iii} = ?$$

Solución:

ΔOCB rectángulo.

$$a) \quad (\overline{OB})^2 = \overline{OC}^2 + \overline{BC}^2 \quad \text{por Pitágoras}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad (R + \overline{BA})^2 &= R^2 + (20m)^2 & \Rightarrow \quad R \\ &= 15m \end{aligned}$$

$$b) \quad \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \quad \text{por suma de segmentos}$$

$$c) \quad \overline{OB} = R + \overline{AB} \quad : \quad \overline{OB} = 15m + 10m$$

$$\Rightarrow \quad \overline{OB} = 25m$$

ΔOCB rectángulo

$$d) \quad \text{Sen } \angle COA = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{20m}{10m} \quad \Rightarrow \quad 1m\angle COA = 53.13^\circ$$

Analizamos la figura del gráfico

e) Área del triángulo rectángulo OCB

$$= \text{Área del sector circular OCA} + A_{iii}$$

$$\text{Área del } \Delta OCB = A_1$$

$$\text{Área del sector circular OCA} = A_2$$

$$f) \quad A_{iiii} = A_1 - A_2$$

$$g) \quad A_1 = \frac{(OC)(CB)}{2} = \frac{(15m)(20m)}{2} = 150m^2$$

$$h) \quad A_2 = \frac{(\pi)(R^2)(m\angle COA)}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot (15m)^2(53.13^\circ)}{360^\circ} = 104m^2$$

(g) y (h) en (f)

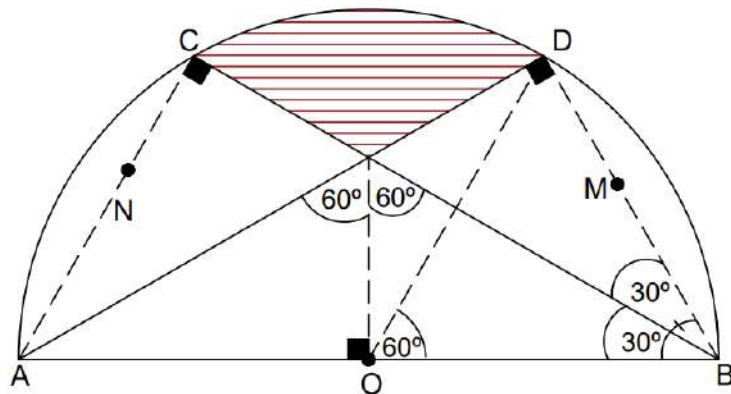
$$A_{iii} = 150m^2 - 104m^2$$

$$A_{iii} = 46m^2 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 6.9.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.9.

Figura 6.9



$$H) \quad \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB}$$

$$T) \quad A_{iii} = ? \quad f(R)$$

Solución:

$\overline{AC} \wedge DB$ cuerdas por construcción

$\overline{OA} = \overline{OB} = \text{radio de la } \theta \quad (O, R)$

ΔACB

$$a) \quad 1m\angle ACB = \text{ángulo inscrito} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$b) \quad 1m\angle ACB = 90^\circ = 1m\angle ADB$$

$\Delta ACB \wedge \square ADB$ rectángulos

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB} \quad \text{por hipótesis.} \quad \therefore \quad \overline{AC}$$

$$= \overline{DB} = R \quad \text{lado del exágono}$$

$$c) \quad \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 \quad \text{por Pitágoras en el } \Delta ADB \text{ rectángulo}$$

$$(2R)^2 = \overline{AD}^2 + R^2 \quad ; \quad \overline{AD}^2 = 3R^2 \quad ; \quad \overline{AD} = 1.732R = \overline{BC}$$

$$\text{Sen } \angle ABD = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{1.732R}{2R} = 0.8666 \quad ; \quad 1m\angle ABD = 60^\circ$$

$$= 1m\angle BAC$$

$$1mDAB = 1m\angle ABC = 30^\circ$$

En el ΔAOP : $PO = h = \text{altura}$

$$\text{Tang. } 30^\circ = \frac{PO}{AO} = \frac{h}{R} \quad \Rightarrow \quad h = (R)(\text{Tang. } 30^\circ) \quad \Rightarrow \quad h$$

$$= 0.577R$$

$$AP^2 = PO^2 + AO^2 \quad \Rightarrow \quad AP = PB = 1.15R \quad \Rightarrow \quad PD = PC$$

$$= 0.58R$$

$$d) \quad A_{iiii} = A_1 - 2A_2 - 2A_3$$

e) $A_1 = \text{Área del semi-círculo}$

f) $A_2 = \text{Área del cuadrilátero } ACPOA = \text{cuadrilátero } OPDB$

g) $A_3 = \text{Área del segmento circular } ACNA$

$$A_1 = \frac{(\pi)(R^2)}{2} \Rightarrow A_1 = 1.577R^2 \quad (h)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= (\text{Área } \triangle ACP + \text{Área } \triangle APO) = \left[\frac{(CP)(CA)}{2} \right] + \left[\frac{(PO)(OA)}{2} \right] \\ &= \left[\frac{(0.58R)(R)}{2} + \frac{(0.577R)(R)}{2} \right] \end{aligned}$$

$$A_2 = 0.5785R^2 \quad (i)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}R^2 \left[\frac{(\pi)(60^\circ)}{180^\circ} - \text{Sen } 60^\circ \right] = 0.09R^2 \quad (j)$$

(h) , (i) , (j) en (d)

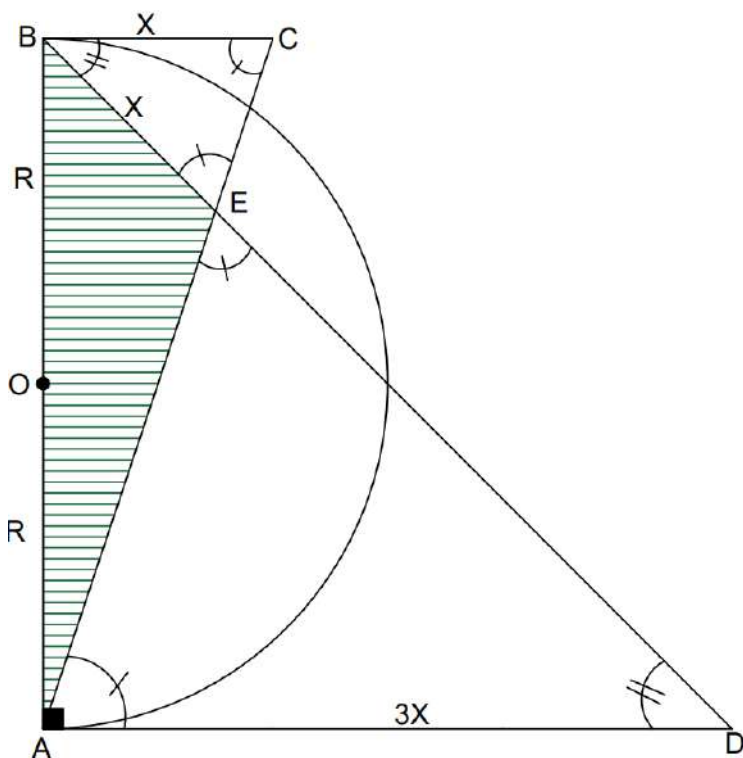
$$A_{iiii} = [1.577 - (2)(0.5785) - (2)(0.09)] R^2$$

$$A_{iiii} = 0.242 R^2 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 6.10.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.10 en función del radio R .

Figura 6.10



H) $BC \perp BA$

$BA \perp AD$

$BC \parallel AD$

T) $A_{\text{iii}} = ? f(R)$

Solución:

$$1m\angle BCA = 1m\angle CAD \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

$$1m\angle CBD = 1m\angle BDA \quad \text{por ángulos alternos internos}$$

$$1m\angle BEC = 1m\angle AED \quad \text{por ángulos opuestos por el vértice}$$

$$\triangle BCE \sim \triangle AED$$

$$a) \quad \frac{BC}{AD} = \frac{BE}{ED} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3x}$$

$$= \frac{x}{ED} \quad \text{por semejanza de triángulos}$$

$$b) \quad ED = 3x$$

$$c) \quad BD = BE + ED = x + 3x \quad \Rightarrow \quad BD = 4x$$

$$\triangle ABD \quad \text{rectángulo}$$

$$d) \quad BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$e) \quad AB^2 = BD^2 - AD^2$$

$$AB = \sqrt{(4x)^2 - (3x)^2} = 2.6457x \quad \Rightarrow \quad AB = 2R$$
$$= 2.646x$$

$$f) \quad R = 1,323x \quad \Rightarrow \quad x = 0,756R$$

$$\triangle ABD \text{ rectángulo}$$

$$g) \quad \text{Sen } \angle ABD = \frac{3x}{4x} = 0.75 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle ABD = 48.59^\circ$$

$$h) \quad \text{Area del } \triangle ABE = A_{iii}$$

$$A_{iii} = (0.5)(AB)(BE)\text{Sen } \angle ABE$$

$$A_{iii} = (0.5)(2R)(0.756R)\text{Sen } 48.59^\circ$$

$$A = 0.567R^2 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 6.11.

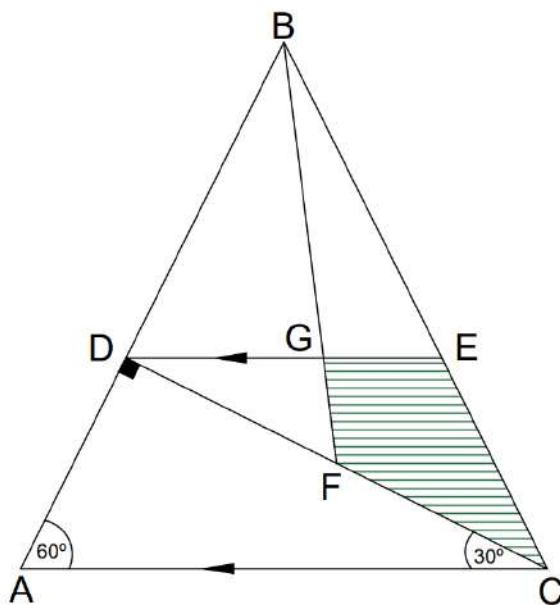
Hallar la relación $\frac{A_{iiii}}{A_{\Delta ABC}}$ de la figura 6.11 sabiendo que:

H) ΔABC equilátero

$$DF = FC$$

$$T) \frac{A_{iiii}}{A_{\Delta ABC}} = ?$$

Figura 6.11



Solución:

a) $AB = BC = AC = L$

b) $1m\angle ACD = 1m\angle DCB = 30^\circ$

c) $DF = FC$ por hipótesis

$\triangle ADC$ rectángulo

$$\cos 30^\circ = \frac{DC}{L} \Rightarrow DC = 0.866L$$

$$DC = DF + FC = 2DF = 2FC$$

$$DF = \frac{DC}{2} = \frac{0.866}{2}L \Rightarrow DF = 0.433L$$

d) $\triangle DBF$ rectángulo

$$\begin{aligned} BF^2 &= DB^2 + DF^2 = (0.5L)^2 + (0.433L)^2 \Rightarrow BF \\ &= 0.6614L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad \text{Sen } \angle DFB &= \frac{0.5L}{0.6614L} = 0.7559 \Rightarrow 1m\angle DFB \\ &= 49.11^\circ \end{aligned}$$

f) El área rayada = Área del $\triangle FBC$ – Área del $\triangle BGE$

Área rayada = A_{iiii}

Área del $\triangle FBC = A_1$

Área del $\triangle BGE = A_2$

$$g) \quad 1m\angle DBF = 90^\circ - 49.11^\circ \Rightarrow 1m\angle DBF = 40.89^\circ$$

$$1m\angle FBC = 1m\angle DBC - 1m\angle DBF = 60^\circ - 40.89^\circ$$

$$\Rightarrow 1m\angle FBC = 19.11^\circ$$

$\triangle DBG$

$$h) \quad 1m\angle BGE = 1m\angle DBG + 1m\angle BDG = 40.89^\circ + 60^\circ$$

$$\Rightarrow 1m\angle BGE = 100.89^\circ$$

$\triangle BGE$

$$\frac{\text{Sen } 60^\circ}{BG} = \frac{\text{Sen } 100.89^\circ}{0.5L} \quad \therefore \quad BG = \frac{(\text{Sen } 60^\circ)(0.5L)}{\text{Sen } 60^\circ}$$

$$\Rightarrow BG = 0.44L$$

$$\begin{aligned}
 i) \quad A_1 &= (0.5)(BF)(BC)(\text{Sen } 19.11^\circ) \\
 &= (0.5)(0.6614L)(L)(\text{Sen } 19.11^\circ) \quad \Rightarrow \quad A_1 \\
 &= 0.1082 L^2 \\
 j) \quad A_2 &= (0.5)(BG)(BE)\text{Sen } 19.11^\circ \\
 &= (0.5)(0.44L)(0.5L)\text{Sen } 19.11^\circ \quad \Rightarrow \quad A_2 \\
 &= 0.036 L^2 \\
 k) \quad A_{iii} &= A_1 - A_2 = 0.1082L^2 - 0.036L^2 \quad \Rightarrow \quad A_{iii} \\
 &= 0.0722L^2 \\
 l) \quad \frac{A_{iii}}{A_{\Delta ABC}} &= \frac{0.0722L^2}{\frac{L^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{0.0722}{0.433} \\
 \frac{A_{iii}}{A_{\Delta ABC}} &= \mathbf{0.1667 \quad LQQD.}
 \end{aligned}$$

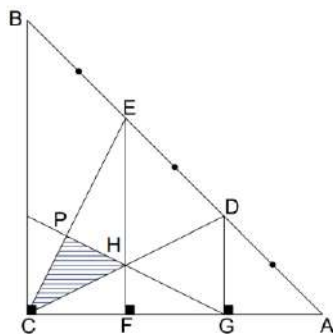
Ejercicio 6.12. ///

Hallar el área de la región rayada en términos del segmento AB de la figura 6.12 sabiendo que:

$$H) \quad \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$T) \quad A_{iii}f(AB) = ?$$

Figura 6.12



Solución:

$$a) \quad AB = BE + ED + DA$$

$$BE = ED = DA \quad \Rightarrow \quad AB = 3BE = 3ED \\ = 3DA$$

$$b) \quad \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3} \quad \text{por hipótesis} \quad \Rightarrow \quad AC = 0.66AB$$

$\triangle ABC$ rectángulo

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = AB^2 - (0.66AB)^2 \quad \Rightarrow \quad BC = 0.75AB$$

$$CF = FG = GA = \frac{AC}{3} = 0.22AB$$

$$\text{Sen} \angle BAC = \frac{0.75AB}{AB} = 0.75 \quad \Rightarrow \quad 1m \angle BAC = 48.59^\circ$$

$\triangle CDA$

$$c) \quad CD^2 = DA^2 + AC^2 - 2(DA)(AC) \cos 48.59 \quad \text{Ley del coseno}$$

$$CD^2 = (0.33AB)^2 + (0.66AB)^2 \\ - 2(0.33AB)(0.66AB) \cos 48.59 \quad \Rightarrow \quad CD \\ = 0.5AB$$

$$\frac{\text{Sen} \angle DCA}{DA} = \frac{\text{Sen} \angle BAC}{CD} \quad \Rightarrow \quad \text{Sen} \angle DCA = \frac{(\text{Sen} 48.59)(0.33AB)}{(0.5AB)}$$

$$1m \angle DCA = 29.66^\circ = 1m \angle HGC \quad \Rightarrow \quad \triangle CHG \text{ isósceles}$$

$\triangle BCE$

$$1m \angle CBE = 90^\circ - 48.59^\circ \quad \Rightarrow \quad 1m \angle CBE = 41.41^\circ$$

$$CE^2 = BE^2 + BC^2 - 2(BE)(BC) \cos \angle CBE$$

$$CE^2 = (0.33AB)^2 + (0.75AB)^2 \\ - 2(0.33AB)(0.75AB) \cos 41.41^\circ \quad \Rightarrow \quad CE \\ = 0.548AB$$

$$d) \quad \frac{\text{Sen} \angle BCE}{BE} = \frac{\text{Sen} \angle CBE}{CE} \quad \Rightarrow \quad \text{Sen} \angle BCE$$

$$= \frac{(\text{Sen} 41.41^\circ)(0.33AB)}{(0.548AB)}$$

$$1m \angle BCE = 23.47^\circ$$

$$e) \quad 1m \angle BCA = 90^\circ = 1m \angle BCE + 1m \angle ECD + 1m \angle DCA$$

$$\Rightarrow \quad 1m \angle ECD = 36.87^\circ$$

$$f) \quad \text{Cos} \angle HCF = \text{Cos} 29.66^\circ = \frac{CF}{CH} = \frac{0.22AB}{CH} \quad \Rightarrow \quad CH$$

$$= 0.253AB$$

$$g) \quad 1m \angle CPG = 180^\circ - 25.12^\circ - 2(29.66)^\circ \quad \Rightarrow \quad 1m \angle CPG$$

$$= 95.56^\circ$$

$$\frac{\text{Sen} \angle CPG}{CG} = \frac{\text{Sen} \angle CGH}{CP} \quad \therefore \quad CP$$

$$= \frac{(\text{Sen} 29.66)(0.44AB)}{\text{Sen} 95.56} \quad \Rightarrow \quad CP = 0.218AB$$

$$h) \quad \text{Área del } \triangle CPH = \text{Área rayada} = (0.5)(CH)(CP) \text{Sen } \angle ECD$$

$$= A_{iii}$$

$$A_{iii} = (0.5)(0.253AB)(0.218AB) \text{Sen } 36.87^\circ$$

$$A_{iiii} = 0.0165AB^2 \quad \text{LQPD.}$$

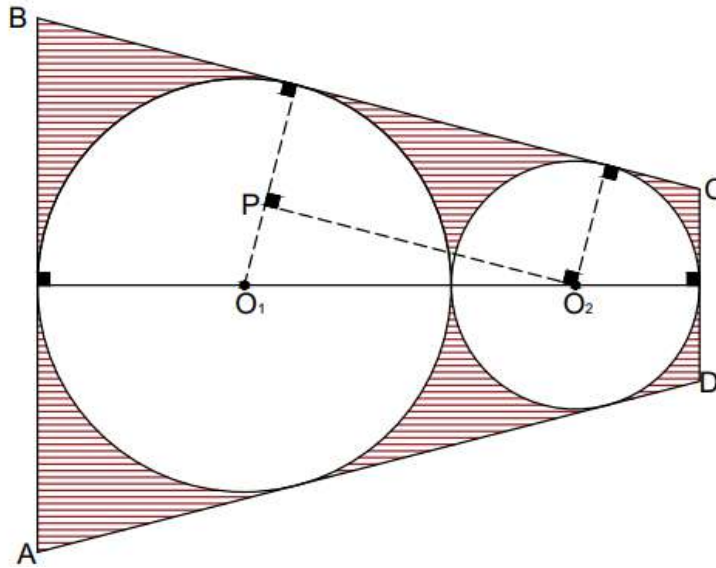
Ejercicio 6.13.

Hallar la relación $\frac{A_{iiii}}{A_{ABCD}}$ de la figura 6.13, sabiendo que:

$$H) \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{7}{11}$$

$$T) \quad \frac{A_{iiii}}{A_{ABCD}} = ?$$

Figura 6.13



Solución:

- a) $AB \parallel CD$ por hipótesis gráfica
 $ABCD$ trapecio isósceles
- b) $BE = BN = EA$ propiedad de las tangentes
- c) $MC = CF = FD$ propiedad de las tangentes
- d) $PO_2 = NM$ por construcción
- e) $\triangle O_1PO_2$ rectángulo

$$PO_2^2 = (O_1O_2)^2 - (PO_1)^2 \quad \Rightarrow \quad PO_2^2 = (R_1 + R_2)^2 + (R_1 - R_2)^2$$

$$R_2 = 0.636 R_1$$

$$PO_2^2 = (1.636R_1)^2 + (0.364R_1)^2 \quad \Rightarrow \quad PO_2 = 1.59R_1$$

$$A_{ABCD} - A_{\oplus(O_1:R_1)} - A_{\oplus(O_2:R_2)} = A_{iiiiii}$$

$$A_{ABCD} = A_1 \quad : \quad A_{\oplus(O1:R1)} = A_2 \quad : \quad A_{\oplus(O2:R2)} = A_3$$

$$A_1 - A_2 - A_3 = A_{iiii}$$

$$f) \quad \text{Sen } \angle NO_1 O_2 = \frac{1.59 R_1}{1.636 R_1} = 0.9718$$

$$1m\angle NO_1 O_2 = 76.38^\circ \quad \Rightarrow \quad 1m\angle O_1 O_2 P = 13.62^\circ$$

$$g) \quad EBNO_1 \wedge MCF O \quad \text{trapezoides simétricos}$$

$$1m\angle EO_1 N = 180^\circ - 76.38^\circ \quad \Rightarrow \quad 1m\angle EO_1 N = 103.62^\circ$$

$$\triangle BEO_1 : \triangle CO_2 F \text{ rectángulos}$$

$$\begin{aligned} \text{Tang. } \angle BO_1 E &= \text{Tang. } \left(\frac{103.62^\circ}{2} \right) = \frac{EB}{EO_1} = \frac{EB}{R_1} \quad \Rightarrow \quad EB \\ &= 1.27 R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tang. } \angle CO_2 F &= \text{Tang. } \left(\frac{76.38^\circ}{2} \right) = \frac{CF}{O_2 F} = \frac{CF}{R_2} \quad \Rightarrow \quad CF \\ &= 0.5 R_2 \end{aligned}$$

$$CD = 2(CF) = (2)(0.5 R_1) = R_1 \quad \Rightarrow \quad CD = R_1$$

$$AB = 2(EB) = 2(1.27 R_1) = 2.54 R_1 \quad \Rightarrow \quad AB = 2.54 R_1$$

$$\begin{aligned} h) \quad A_1 &= \left[\frac{AB + CD}{2} \right] EF = \left[\frac{2.54 R_1 + R_1}{2} \right] [3.272 R_1] \quad \Rightarrow \quad A_1 \\ &= 5.79 R_1 \end{aligned}$$

$$i) \quad A_2 = (\pi) R_1^2 = 3.1416 R_1^2$$

$$j) \quad A_3 = (\pi) R_2^2 = (\pi)(0.636 R_1)^2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = 1.27 R_1^2$$

$$A_{iiii} = (5.79 - 3.1416 - 1.27) R_1^2 \quad \Rightarrow \quad A_{iiii} = 1.378 R_1^2$$

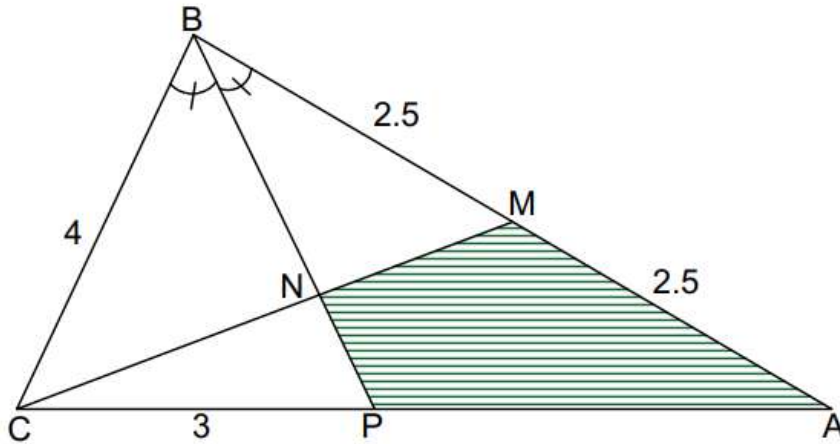
$$\frac{A_{iiii}}{A_1} = \frac{1.378 R_1^2}{5.79 R_1^2}$$

$$\frac{A_{iiii}}{A_1} = 0.238 \quad LQ QD.$$

Ejercicio 6.14.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.14.

Figura 6.14



T) $A_{iii} = ?$

Solución:

a) $\frac{CP}{CB} = \frac{PA}{AB}$ *propiedad de la bisectriz interna*

$$PA = \frac{(CP)(AB)}{CB} = \frac{(3m)(5m)}{4m} \Rightarrow PA = 3.75m$$

$$\begin{aligned} b) \cos \angle ABC &= \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{(2)(BC)(AB)} \\ &= \frac{(4m)^2 + (5m)^2 - (3m + 3.75m)^2}{(2)(4m)(5m)} = -0.114 \end{aligned}$$

$$1m\angle ABC = 2m\angle 1 = 96.55^\circ \Rightarrow 1m1 = 48.27^\circ$$

$$\frac{\text{Sen } \angle BAC}{BC} = \frac{\text{Sen } \angle ABC}{AC} \Rightarrow \text{Sen } \angle BAC = \frac{(\text{Sen } 96.55^\circ)(4m)}{6.75m}$$

$$1m\angle BAC = 36^\circ \Rightarrow 1m\angle BPA = 95.73^\circ \\ \Rightarrow 1m\angle ACB = 47.45^\circ$$

ΔCBM

$$c) \quad CM^2 = BM^2 + BC^2 - 2 \cdot BM \cdot BC \cdot \cos \angle BMC$$

$$CM^2 = (2.5m)^2 + (4m)^2 - 2(2.5m)(4m)\cos 96.55^\circ \Rightarrow CM = 4.95m$$

$$\frac{\text{Sen } \angle BMC}{BC} = \frac{\text{Sen } \angle CBM}{CM} \Rightarrow \text{Sen } \angle BMC = \frac{(\text{Sen } 96.55^\circ)(4m)}{4.95m}$$

$$1m\angle BMC = 53.39^\circ : 1m\angle BNM = 78.34^\circ$$

ΔBNM

$$d) \quad \frac{\text{Sen } BMC}{BN} = \frac{\text{Sen } BNM}{BM} \Rightarrow BN = \frac{(\text{Sen. } 53.39^\circ)(2.5m)}{\text{Sen } 78.34^\circ}$$

$$\dots BN = 2.05m$$

$$e) \quad \text{Área del } \Delta PBA - \text{Área del } \Delta BNM = \text{Área rayada}$$

$$A_1 = \text{Área del } \Delta PBA$$

$$A_2 = \text{Área del } \Delta BNM$$

$$A_{iiii} = \text{Área rayada}$$

$$f) \quad A_1 = (0.5)(PA)(BA)\text{Sen } \angle BAP = (0.5)(3.75m)(5m)\text{Sen } 36^\circ$$

$$A_1 = 5.51m^2$$

$$g) \quad A_2 = (0.5)(BN)(BM)\text{Sen } \angle PBA = (0.5)(2.05m)(2.5m)\text{Sen } 48.27^\circ$$

$$A_2 = 1.91m^2$$

$$h) \quad A_{iii} = A_1 - A_2$$

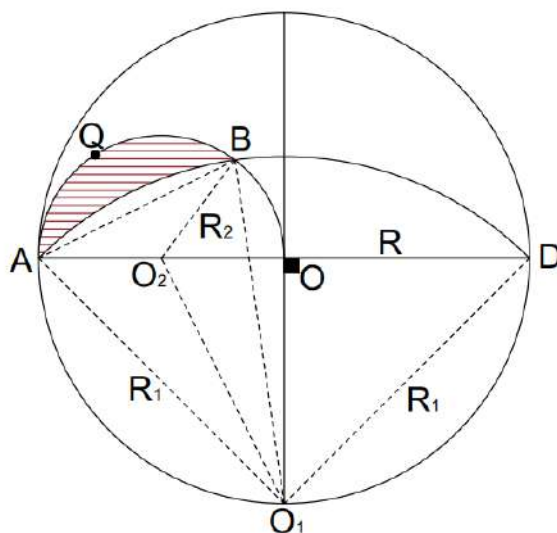
$$A_{iiii} = (5.51 - 1.91)m^2$$

$$A_{iiii} = 3.6m^2 \quad \text{LQQD.}$$

Ejercicio 6.15.

Calcular el área de la región rayada de la figura 6.15.

Figura 6.15



H) $R = 2R_2 = 10 \text{ unidades}$

T) $A_{iiii} = ?$

Solución:

a) $AO = OO_1 = OD = R = 10 \text{ unidades}$

b) $O_1A = O_1B = O_1D = R_1 = R\sqrt{2} = 1.4142(10\text{unid.})$
 $= 14.14 \text{ unidades}$

c) $O_2B = O_2O = O_2A = R_2 = 5 \text{ unidades}$
 $\triangle O_1AO_2 \text{ rectángulo}$

$$\begin{aligned} \text{Tag. } \angle O_1 O_2 O &= \frac{R}{R_2} = \frac{10 \text{unid.}}{5 \text{unid.}} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle O_1 O_2 O \\ &= 63.435^\circ \end{aligned}$$

$\Delta O_1 O_2 O$ rectángulo

$$\begin{aligned} O_1 O_2 &= \sqrt{O_1 O^2 + O_2 O^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} \quad \Rightarrow \quad O_1 O_2 \\ &= 11.18 \text{ uni} \end{aligned}$$

d) $\Delta O_1 B O_2$

$$\begin{aligned} \cos \angle O_1 O_2 B &= \frac{R_2^2 + (O_1 O_2)^2 - R_1^2}{(2)(R_2)(O_1 O_2)} = \frac{(5)^2 + (11.18)^2 - (14.14)^2}{(2)(5)(11.18)} \\ &= -0.44675 \quad \Rightarrow \quad 1m\angle O_1 O_2 B = 116.53^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 1m\angle B O_2 O &= 1m\angle O_1 O_2 B - 1m\angle O_1 O_2 O = 116.53^\circ - 63.435^\circ \\ &= 53.1^\circ \end{aligned}$$

$$1m\angle O_2 B O = 1m\angle O_2 O B = \frac{180^\circ - 53.1^\circ}{2} = 63.45^\circ$$

$$\begin{aligned} 1m\angle A O_2 B &= 180^\circ - 1m\angle B O_2 O = 180^\circ - 53.1^\circ \\ \Rightarrow \quad 1m\angle A O_2 B &= 126.9^\circ \end{aligned}$$

$\Delta A B O$ rectángulo

$$\begin{aligned} \text{f) } 1m\angle B A O &= 1m\angle A B O - 1m\angle B O A = 90^\circ - 63.45^\circ \\ \Rightarrow \quad 1m\angle B A O &= 26.55^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1m\angle B A O_1 &= 1m\angle B A O + 45^\circ = 26.55^\circ + 45^\circ \\ \Rightarrow \quad 1m\angle B A O_1 &= 71.55^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1m\angle A O_1 B &= 180^\circ - 2m\angle B A O_1 = 180^\circ - (2)(71.55^\circ) \\ \Rightarrow \quad 1m\angle A O_1 B &= 36.9^\circ \end{aligned}$$

g) Área rayada

$$\begin{aligned} &= \text{Área del seg. circular APBA} \\ &\quad - \text{Área del seg. circular AKBA} \end{aligned}$$

h) $A_{\text{iiiiii}} = \text{Área rayada}$

i) $A_1 = \text{Área del seg. circular APBA}$

j) $A_2 = \text{Área del seg. circular AKBA}$

$$A_1 = (0.5)R_2^2 \left[\frac{(\pi)(1m\angle AO_2B)}{180^\circ} - \text{sen } \angle AO_2B \right]$$

$$A_1 = (0.5)(5\text{unid.})^2 \left[\frac{(\pi)(126.9^\circ)}{180^\circ} - \text{sen. } 126.9^\circ \right] \Rightarrow A_1 = 17.69 \text{ unid.}^2$$

$$A_2 = (0.5)R_1^2 \left[\frac{(\pi)(1m\angle AO_1B)}{180^\circ} - \text{sen } \angle AO_1B \right]$$

$$A_2 = (0.5)(14.14\text{unid.})^2 \left[\frac{(\pi)(36.9^\circ)}{180^\circ} - \text{sen. } 36.9^\circ \right] \Rightarrow A_2 = 4.36 \text{ unid.}^2$$

$$k) \quad A_{iiii} = A_1 - A_2$$

$$A_{iiii} = 17.69 \text{ unid.}^2 - 4.36 \text{ unid.}^2$$

$$A_{iiii} = 13.33 \text{ unid}^2 \quad LQQD.$$

Ejercicio 6.16.

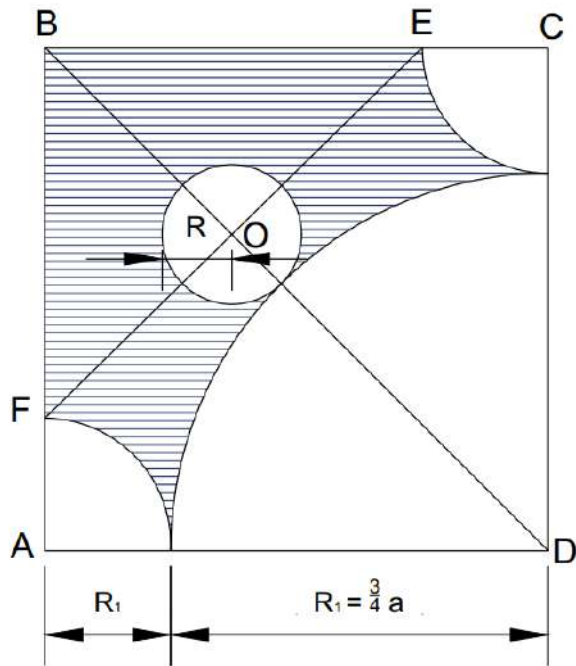
Calcular la relación $\frac{A_{iiii}}{A_{ABCD}}$ de la figura 6.16, sabiendo que:

H) $ABCD$ cuadrado de lado "a"

$$R_1 = \frac{3}{4} a$$

$$T) \quad \frac{A_{iiii}}{A_{ABCD}} = ?$$

Figura 6.16



Solución:

- a) $DG = DJ = DH = R_1 = 0.75a$ por hipótesis gráfica
- b) $CE = CH = AF = AG = 0.25a = R_2$ por hipótesis gráfica
- c) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}AFG} = A_{\text{SECTOR CIRCULAR}ECH} = A_2$
 Descomposición en áreas parciales
- d) $A_{ABCD} = 2A_2 + A_{\text{SECTOR CIRCULAR}GJHD} + A_{\theta(O,R)} + \text{Área rayada}$
 $A_{ABCD} = A_1$
 $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}GJHD} = A_3$
 $A_{\theta(O,R)} = A_4$
 $\text{Área rayada} = A_{iiii}$

$$e) A_1 = a^2$$

$$f) A_2 = \frac{(\pi)(R_2^2)(1m\angle ECH)}{360^\circ} = \frac{(\pi)(0.25a)^2(90^\circ)}{360^\circ} \Rightarrow A_2 = 0.05a^2$$

$$g) A_3 = \frac{(\pi)(R_2^2)(1m\angle GDH)}{360^\circ} = \frac{(\pi)(0.75a)^2(90^\circ)}{360^\circ} \Rightarrow A_3 = 0.44a^2$$

$\triangle BFE$ rectángulo e isósceles

$$1m\angle BFE = 1m\angle BEF = 1m\angle 1 = 45^\circ$$

"O" punto medio de FE(hipotenusa)

$$BO = OE$$

$= OF$ propiedad de la mediana en triángulos rectángulos

$$1m\angle BOF = 1\angle recto = 90^\circ$$

$\triangle BEO$ rectángulo

$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{OE}{BE} \Rightarrow OE^2 = (\text{Sen } 45^\circ)(0.75a) \Rightarrow OE = 0.53a$$

$\triangle ABD$ rectángulo

$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow BD = 1.4142a$$

$$h) BD = BO + OJ + JD = 1.4142a = 0.53a + R + R_1 \Rightarrow R = 0.134a$$

$$i) A_4 = (\pi)R^2 = (\pi)(0.134a)^2 \Rightarrow A_4 = 0.056a^2$$

$$j) A_{III} = A_1 - 2A_2 - A_3 - A_4 = a^2 - 2(0.05a^2) - 0.44a^2 - 0.056a^2 \\ A_{III} = 0.4a^2$$

$$k) \frac{A_{III}}{A_{ABCD}} = \frac{0.4a^2}{a^2}$$

$$\frac{A_{III}}{A_{ABCD}} = 0.4 \quad LQQD$$

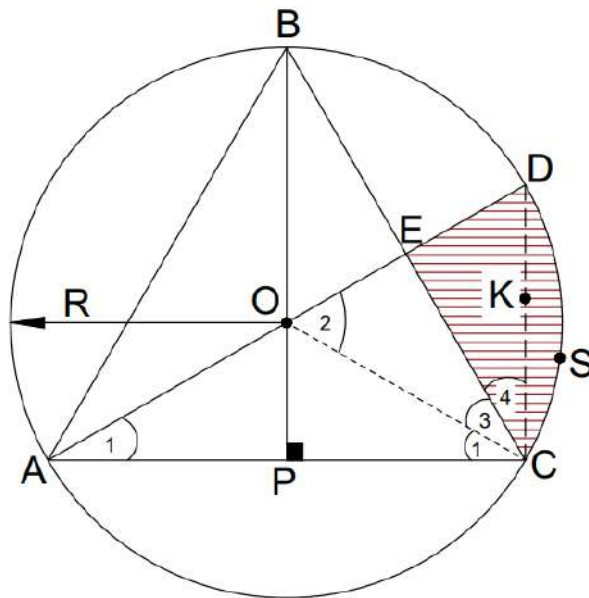
Ejercicio 6.17.

Calcular la relación $\frac{A_{iiii}}{A_{ABC}}$ de la figura 6.17, sabiendo que:

H) $1m\angle 1 = 20^\circ$

T) $\frac{A_{iiii}}{A_{ABC}} = ?$

Figura 6.17



Solución:

a) $\theta(o, R)$

b) $DC =$ cuerda auxiliar por construcción

c) $1m\angle 1 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$ por def. de ángulo inscrito

$$\overset{\cap}{DC} = 2m\angle 1 = 40^\circ = 1m\angle 2 \quad \text{por ángulo central}$$

$$1m\angle ACD = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \square ADC \text{ es rectángulo}$$

$$\begin{aligned} \text{Sen}\angle 1 &= \frac{DC}{AD} \quad \Rightarrow \quad DC = \text{Sen}20^\circ(2R) \quad \Rightarrow \quad DC \\ &= 0.684R \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = \sqrt{(2R)^2 - (0.684R)^2} \quad \Rightarrow \quad AC = 1.88R$$

$$d) \quad \triangle ODC \text{ es isósceles} \quad \therefore \quad 1m\angle OCD = 1m\angle ODC = 70^\circ$$

$$e) \quad \triangle BOC = \triangle BOA \quad \text{son isósceles}$$

$$1m\angle AOC = 180^\circ - 1m\angle 2 = 140^\circ \quad \text{por suplementarios}$$

$$1m\angle BOC = \frac{360^\circ - 1m\angle AOC}{2} = 110^\circ$$

$$1m\angle OCB = 1m\angle OBC = 1m\angle 3 = 35^\circ$$

$$1m\angle EDC = 90^\circ - 1m\angle PCB = 1m\angle 4 = 35^\circ$$

$$f) \quad \triangle EDC$$

$$1m\angle DEC = 180^\circ - 1m\angle 4 - 1m\angle ADC = 75^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Sen } \angle DEC}{DC} &= \frac{\text{Sen } \angle EDC}{EC} \quad \Rightarrow \quad EC \\ &= \frac{(\text{Sen}70^\circ)(0.684R)}{\text{Sen}75^\circ} \quad \Rightarrow \quad EC = 0.665R \end{aligned}$$

$$g) \quad \text{Area rayada}$$

$$= \text{Area del } \triangle EDC$$

$$+ \text{Area del segmento circular } DSCKD$$

$$h) \quad A_{\triangle EDC} = A_1 = (0.5)(EC)(DC)\text{Sen } \angle 4$$

$$\begin{aligned} &= (0.5)(0.665R)(0.684R)\text{Sen}35^\circ \quad \Rightarrow \quad A_1 \\ &= 0.13R^2 \end{aligned}$$

$$i) \quad A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR } DSCKD} = A_2$$

$$= (0.5)(OC)^2 \left(\frac{(\pi)(1m\angle 2)}{180^\circ} - \text{Sen}\angle 2 \right)$$

$$A_2 = (0.5)(R)^2 \left(\frac{(\pi)(40^\circ)}{180^\circ} - \text{Sen}40^\circ \right) \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0.03R^2$$

$$j) \quad A_{III} = A_1 + A_2 = 0.13R^2 + 0.03R^2 \quad \Rightarrow \quad A_{iii} = 0.16R^2$$

$$k) \quad \triangle BPC \text{ rectángulo} \quad \therefore \quad \text{Tag} \angle BCP = \frac{PB}{PC}$$

$$\Rightarrow \quad PB = (\text{tag} 55^\circ)(0.5)(1.88R) \quad \Rightarrow \quad PB = 1.34R$$

$$l) \quad A_{\triangle ABC} = \frac{(AC)(PB)}{2} = \frac{(1.88R)(1.34R)}{2} \quad \Rightarrow \quad A_{\triangle ABC} = 1.26R^2$$

$$m) \quad \frac{A_{iii}}{A_{\triangle ABC}} = \frac{0.16R^2}{1.26R^2}$$

$$\frac{A_{iii}}{A_{\triangle ABC}} = 0.127 \quad \text{LQQD}$$

Ejercicio 6.18.

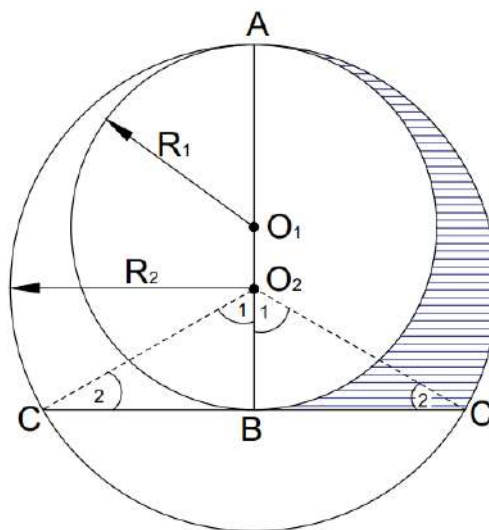
Calcular el área de la región rayada de la figura 6.18 conociendo que:

$$H) \quad R_1 = 8cm$$

$$R_2 = 12cm$$

$$T) \quad A_{iii} = ?$$

Figura 6.18



Solución:

a) $O_1O_2 = R_2 - R_1$ distancia entre centros

$$\Rightarrow O_1O_2 = 12cm - 8cm = 4cm$$

b) $O_1B = R_1 = O_1O_2 + O_2B$

c) $O_2B = R_1 - O_1O_2 = 8cm - 4cm \Rightarrow O_2B = 4cm$

d) $O_2C = O_2D = R_2$

$$\Delta O_2BC = \Delta O_2BD \text{ rectángulos } (L, A, L)$$

e) $O_2B = \text{altura, mediana, bisectriz, mediatriz, ceviana}$

$$\text{Sen } \angle O_2CB = \frac{O_2B}{O_2C} = \frac{4cm}{12cm} = 0.333 \Rightarrow 1m\angle O_2CB$$

$$= 1m\angle 2 = 19.41^\circ$$

f) $1m\angle 1 + 1m\angle 2 = 90^\circ \therefore 1m\angle 1$

$$= 90^\circ - 19.47^\circ \Rightarrow 1m\angle 1 = 70.53^\circ$$

$$1m\angle CO_2D = 2m\angle 1 = 141.06^\circ$$

Descomposición de la figura principal

g) $\text{Area } \theta (O_2, R_2) - \text{Area } \theta (O_1, R_1)$

$$- \text{Area del seg. circular CBDEC} = \frac{\text{Area rayada}}{2}$$

h) $\text{Area } \theta (O_2, R_2) = A_1$

i) $\text{Area } \theta (O_1, R_1) = A_2$

j) $\text{Area del segmento circular CBDEC} = A_3$

k) $\frac{\text{Area rayada}}{2} = A_{iiii}$

l) $A_{iiii} = A_1 - A_2 - A_3$

$$A_1 = (\pi)(R_2)^2 = (\pi)(12cm)^2 \Rightarrow A_1 = 452.39cm^2$$

$$A_2 = (\pi)(R_1)^2 = (\pi)(8cm)^2 \Rightarrow A_2 = 201.06cm^2$$

$$A_3 = (0.5)(R_2^2) \left(\frac{(\pi)(2m\angle 1)}{180^\circ} - \text{sen. } 2m\angle 1 \right)$$

$$A_3 = (0.5)(12cm)^2 \left(\frac{(\pi)(141.06^\circ)}{180^\circ} - \text{sen. } 141.06^\circ \right)$$

$$\Rightarrow A_3 = 132.01cm^2$$

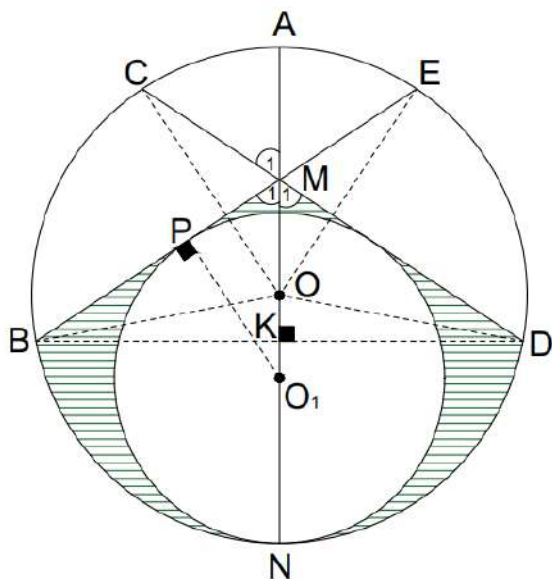
$$m) \quad A_{iiii} = \frac{(452.39 - 201.06 - 132.01)cm^2}{2}$$

$$A_{iiii} = 59.66cm^2 \quad LQQD.$$

Ejercicio 6.19. ///

Calcular el área rayada de la figura 6.19 en función del radio R.

Figura 6.19



$$H) \quad AM = MO$$

$$\widehat{mAC} = \widehat{mAE} = 20^\circ$$

$$T) \quad A_{iiii} = f(R)$$

Solución:

$$OE = OC = OB = OD = R \quad \text{por construcción}$$

$$O_1P = R_1$$

$$1m\angle COE = 40^\circ \quad \text{por hipótesis}$$

b) $\triangle OAE$ isósceles

$$AE^2 = OE^2 + OA^2 - 2(OE)(OA) \cos \angle COE$$

$$AE = \sqrt{2R^2 - (2)(R)(R) \cos 20^\circ} \quad : \quad AE = 0.3473R$$

$$1m\angle OAE = 1m\angle OEA = 80^\circ \quad \text{por (b)}$$

c) $\triangle AME$

$$EM^2 = AM^2 + AE^2 - 2(AM)(AE) \cos \angle MAE \quad \text{ley del coseno}$$

$$EM = \sqrt{(0.5R)^2 + (0.3473R)^2 - (2)(0.5R)(0.3473R) \cos 80^\circ} \quad : \quad EM = 0.557R$$

$$\frac{\text{Sen } \angle AME}{AE} = \frac{\text{Sen } \angle MAE}{EM} \quad : \quad \text{Sen } \angle AME = \text{Sen } \angle 1$$

$$= \frac{(\text{Sen } 80^\circ)(0.3473R)}{(0.557R)} \quad \Rightarrow \quad 1m\angle 1 = 37.88^\circ$$

$$1m\angle CME = 2m\angle 1$$

$$= \frac{\widehat{BD} + \widehat{CAE}}{2} \quad \text{por ángulo interior en la } \theta$$

$$(2)(2)(37.88^\circ) = \widehat{BD} + 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \widehat{BD} = 111.52^\circ$$

$$= 1m\angle BOD \quad \text{por ángulo central}$$

d) $\triangle MPO_1$ rectángulo

$$\text{Sen } 37.88^\circ = \frac{R_1}{[(0.5R) + (R + R_1)]} \quad \Rightarrow \quad R_1 = 0.570R$$

e) $\triangle OBD$ isósceles

$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2(OB)(OD) \cos \angle BOD$$

$$BD = \sqrt{2R^2 - 2R \cos 111.52^\circ} \quad : \quad BD = 1.653R$$

$$BD = 2BK = 2KD \quad : \quad BK = 0.826R$$

f) $\triangle BMK$ rectángulo

$$\text{Sen} 37.88^\circ = \frac{0.826R}{MB} \Rightarrow MB = 1.345R$$

Descomposición parcial de regiones

$A_1 = \text{Area del } \triangle BMD$

$A_2 = \text{Area del segmento circular BKDNB}$

$A_3 = \text{Area del círculo de } (O_1, R_1)$

$A_{iiii} = \text{Area de la región rayada}$

$$g) \quad A_{iiii} = A_1 + A_2 - A_3$$

$$h) \quad A_1 = \frac{1}{2}(MB)(MD) \text{Sen } (2m\angle 1) \\ = \frac{1}{2}(1.345R)(1.345R) \text{Sen} 75.76^\circ$$

$$A_1 = 0.876R^2 \quad (h')$$

$$i) \quad A_2 = \frac{1}{2}R^2 \left[\frac{(\pi)(1m\angle BOD)}{180^\circ} - \text{Sen} \angle BOD \right] \\ = \frac{1}{2}R^2 \left[\frac{(\pi)(111.52^\circ)}{180^\circ} - \text{Sen} 111.52^\circ \right] \Rightarrow A_2 \\ = 0.508R^2 \quad (i')$$

$$j) \quad A_3 = (\pi)R_1^2 = (\pi)(0.570R)^2$$

$$A_3 = 1.0207R^2 \quad (j')$$

$(h')(i')(j')$ en (g)

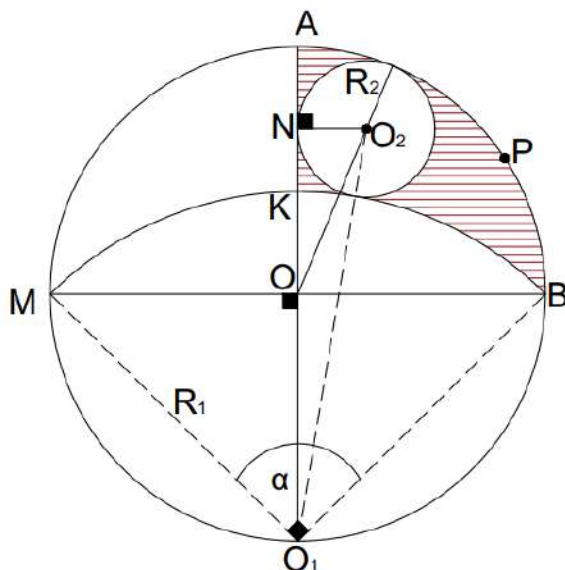
$$g) \quad A_{iiii} = 0.876R^2 + 0.508R^2 - 1.0207R^2$$

$$A_{iiii} = 0.363R^2 \quad \mathbf{LQQD.}$$

Ejercicio 6.20. //

Calcular el área rayada de la figura 6.20 en función del radio R.

Figura 6.20



$$T) \quad A_{iii} = ? \quad f(R)$$

Solución:

- a) $A_{iii} = A_{(\text{Sector Circular } OAPBO)} - A_{(\frac{\text{Segmento Circular } MKBOM}{2})}$
 $\quad \quad \quad - A_{(\text{Circulo } (O_1, R_1))}$
- b) $A_1 = A_{(\text{Sector Circular } OAPBO)}$
- c) $A_2 = A_{(\frac{\text{Segmento Circular } MKBOM}{2})}$
- d) $A_3 = A_{(\text{Circulo } (O_1, R_1))}$
- e) $A_{iii} = A_1 - A_2 - A_3$

ΔNO_2O rectángulo por construcción

$$f) NO^2 = O_2O^2 - NO_2 \text{ por Pitágoras}$$

$$O_2O = R - R_2$$

$$NO_2 = R_2$$

$$NO_2^2 = (R - R_2)^2 - R^2 = R^2 - 2R_2R + R_2^2 - R^2 \Rightarrow NO_2 \\ = \sqrt{R^2 - 2R_2R}$$

ΔNO_1O_2 rectángulo por construcción

$$g) NO_1^2 = O_1O_2^2 - NO_2$$

$$NO_1 = NO + R \text{ por suma de segmentos}$$

$$O_1O_2 = R\sqrt{2} + R_2$$

$$h) (\sqrt{R^2 - 2R_2R} + R)^2 = (R\sqrt{2} + R_2)^2 - R_2^2$$

Desarrollando (h)

$$i) R^2 - 2RR_2 - 5.82R_2^2 = 0$$

Desarrollando (i)

$$j) R_2 = 0.27R$$

$$k) A_1 = A_{(\text{Sector Circular } OAPBO)} = \frac{(\pi)R^2}{4} \Rightarrow A_1 \\ = 0.78R^2 \quad (k')$$

$$l) A_2 = A_{(\frac{\text{Segmento Circular } MKBOM}{2})} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} R_1^2 \left(\frac{(\pi)(\alpha^\circ)}{180^\circ} - \text{Sen } \alpha^\circ \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} (2R^2) \left(\frac{(\pi)(90^\circ)}{180^\circ} - \text{sen } 90^\circ \right) \right]$$

$$A_2 = 0.285R^2 \quad (l')$$

$$m) A_3 = A_{(\text{Circulo } (o_1, R_1))} = (\pi)(R_2^2) = (\pi)(0.27R)^2$$

$$A_2 = 0.23R^2 \quad (m')$$

$(k')(l')(m')$ en (e)

$$A_{iii} = 0.78R^2 - 0.285R^2 - 0.23R^2$$

$$A_{iii} = 0.265R^2 \quad LQQD.$$

Referencias

- Albuja G., y Vallejo P. (2011). *Geometría básica*.
- Alva, F. (2000). *Geometría: teoría y práctica*. Editorial San Marcos.
- Antonov, N., Vygotsky, M., Nikitin, V., y Sankin, A., (1976). *1000 problemas de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría*. Paraninfo.
- Aucallanchi, F. (2000). *Problemas de geometría y cómo resolverlos*. RACSO Editores.
- Bruño, G. M. (1978). *Geometría curso superior*.
- Calvache, G., Rosero, T., Yacelga, M. (2011). *Geometría*.
- Jurgensen, D. (1968). *Geometría moderna*. Publicaciones Cultural.
- Manzano H. (2011). *Geometría*. (1a ed.) Editorial Copycenter.
- Straeneo, L., Consorti, R. (s.f.). *Dibujo técnico mecánico*.
- Ubaldo, L. (2005). *Geometría*. Editorial San Marcos.



La presente publicación, tiene por objetivo acercar al lector al cálculo y análisis de las diferentes figuras geométricas, siendo un instrumento imprescindible para el estudio del álgebra, trigonometría, cálculo, física, dibujo técnico, entre otras ciencias de la ingeniería. El libro está estructurado en seis capítulos, los cuales inician con los aspectos teóricos más importantes en la parte introductoria y luego describen la resolución de ejercicios de segmentos rectilíneos, ángulos, triángulos, polígonos, círculo y regiones rayadas, de tal manera que se optimice el tiempo de la resolución de aplicaciones de la geometría plana.

ISBN: 978-9942-616-32-6



9789942616326